Travail de préparation à la terminale technologique
Tronc commun

I. Les suites

Modes de génération

- **À l'aide d'une fonction** : on donne l'expression de u_n en fonction de son indice n.
- **À l'aide d'une relation de récurrence** : (u_n) est définie par son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir des précédents.
- **Par un autre moyen** : par exemple un algorithme.

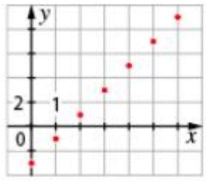
Suite arithmétique

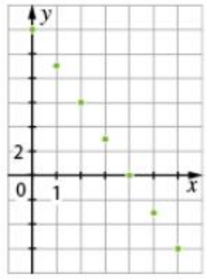
Définie par son 1er terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation : $u_{n+1} = u_n + r$ (r est la raison).

• Variations

– Si $r > 0$, (u_n) est croissante. – Si $r < 0$, (u_n) est décroissante.

• Représentations graphiques





Suite numérique

Une **suite** u de nombres réels est une fonction dont la variable est un entier naturel.
Le **terme d'indice n** (ou de rang n) s'écrit $u(n)$ ou u_n.

Sens de variation

Une suite (u_n) est :
- **croissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- **décroissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- **constante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.

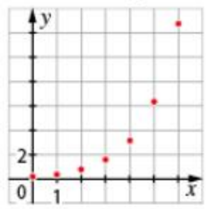
Suite géométrique

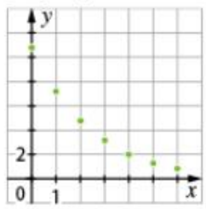
Définie par son 1er terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation : $u_{n+1} = qu_n$ (q est la raison).

• Variations

– Si $q > 1$, (u_n) est croissante. – Si $q = 1$, (u_n) est constante.
– Si $0 < q < 1$, (u_n) est décroissante.

• Représentations graphiques





Représentation graphique

La représentation graphique d'une suite (u_n) dans un repère du plan est constituée des points de coordonnées $(n\,;u_n)$.

ÉNONCÉ

L'iode 131 est un produit radioactif utilisé en médecine. Il peut cependant être dangereux lorsqu'on le reçoit en grande quantité.
On considère un échantillon d'une population de noyaux d'iode 131 comportant 10^6 noyaux au début de l'observation. On considère que le nombre de noyaux diminue chaque jour de 8,3 %.
On note u_n le nombre de noyaux de cet échantillon au bout de n jours. On a donc $u_0 = 10^6$.

1. Calculer u_1, puis u_2.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

3. Déterminer le nombre de noyaux d'iode 131 présents dans l'échantillon au bout de 5 jours.

4. On considère la fonction Python ci-contre.

```python
def iode():
    n = 0
    u = 10**6
    while u > 10**6/2:
        n = n+1
        u = 0.917*u
    return(n)
```

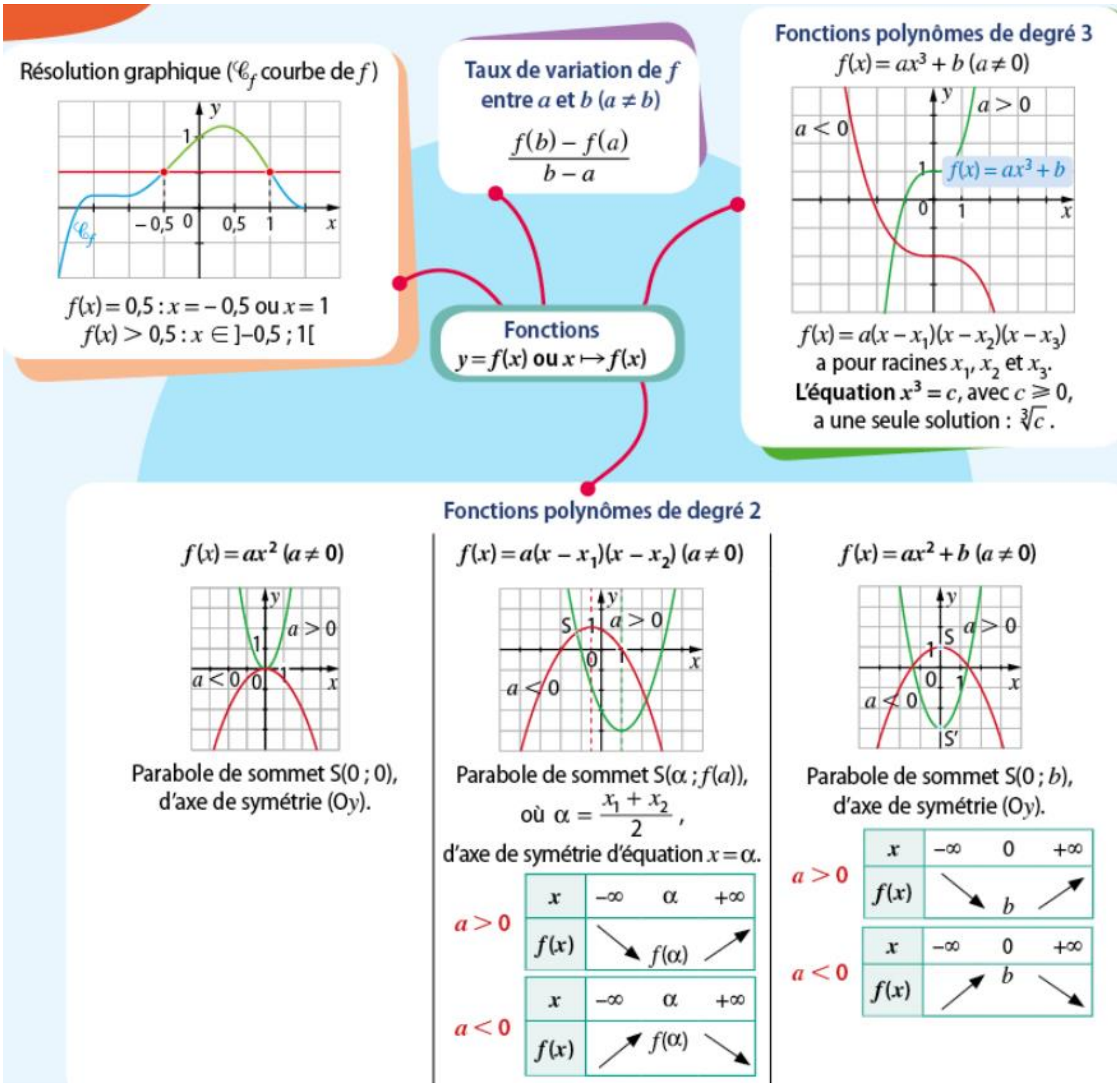
a. À quoi correspond la valeur n retournée par cette fonction ?
b. Si on exécute cette fonction, quelle valeur obtient-on ?
c. Déterminer à partir de combien de jours la population de noyaux aura diminué au moins de moitié.
Cette durée s'appelle la demi-vie de l'iode 131.

5. Pour le césium 137, le nombre de noyaux diminue chaque année de 2,3 %. Quelles modifications faut-il apporter à la fonction précédente pour trouver la demi-vie du césium 137 sachant que la population au départ est de 10^8 noyaux ?

COMPRENDRE L'ÉNONCÉ ET CHOISIR LES MÉTHODES	RÉPONSES
1. Pour déterminer une valeur après une évolution de taux donné, utiliser le coefficient multiplicateur de l'évolution. *Capacité 6 du chapitre 1, p. 10*	**1.** u_0 est donné par l'énoncé : il s'agit du nombre de noyaux d'iode 131 présents au début de l'observation. Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 8,3 % est $1 - 0{,}083$ soit 0,917. On en déduit que : $u_1 = 10^6 \times 0{,}917 = 917\,000$ et $u_2 = 0{,}917 \times u_1 = 0{,}917 \times 917\,000 = 840\,889$.
2. Pour déterminer la nature d'une suite, on peut reconnaître la relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n. *Capacité 6, p. 84*	**2.** Le nombre u_{n+1} de noyaux d'iode 131 présents au bout de $n + 1$ jours s'obtient en diminuant de 8,3 % le nombre u_n de noyaux d'iode 131 présents au bout de n jours. On en déduit que $u_{n+1} = 0{,}917 \times u_n$ pour tout entier naturel n. La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 0,917 et de premier terme $u_0 = 10^6$.
3. Il s'agit de calculer un terme de la suite (u_n). Bien identifier l'indice du terme à calculer. *Capacité 1, p. 80* *Algorithme 4, p. 81*	**3.** Le nombre de noyaux d'iode 131 présents dans l'échantillon au bout de 5 jours est u_5. On peut obtenir sa valeur à l'aide du mode **SUITE** d'une calculatrice ou d'une fonction en langage Python. On obtient $u_5 \approx 648\,405$.
4. a. On doit déterminer ce que contient la variable n. **b.** Comprendre le rôle de la boucle non bornée. *Algorithme 13, p. 87* **c.** Il faut interpréter le résultat retourné par la fonction. *Capacité 2, p. 80*	**4. a.** La valeur n retournée par la fonction est le nombre de fois où la boucle **while** a été exécutée, c'est-à-dire le rang du 1er terme de la suite dont la valeur est inférieure à $\dfrac{10^6}{2}$. Ainsi n est le nombre de boucles qu'il faut effectuer pour que le nombre de noyaux diminue de moitié. **b.** En exécutant la fonction, on obtient $n = 8$. **c.** Au bout de 8 jours, la population de noyaux aura diminué au moins de moitié.
5. Modifier la fonction Python avec les valeurs correspondant au césium137. *Algorithme 13, p. 87*	**5.** Dans les lignes 3 et 4, on remplace 10^6 par 10^8 et, à la ligne 6, on remplace 0,917 par 0,977, coefficient multiplicateur associé à une diminution de 2,3 %. On obtient $n = 30$. La demi-vie du césium137 est donc de 30 ans.

```python
1 def cesium():
2     n = 0
3     u = 10**8
4     while u > 10**8/2:
5         n = n+1
6         u = 0.977*u
7     return(n)
```

II. Les fonctions polynômes de degré 2 ou 3



ÉNONCÉ CALCULER REPRÉSENTER 45 min

Suite à l'augmentation du nombre de personnes malades dans un village, une organisation a mis en place une campagne de vaccination en janvier 2019.

Pour prévoir l'évolution de la maladie dans les mois à venir, on modélise la proportion de personnes malades en fonction du temps t, exprimé en mois écoulés depuis janvier 2019, par la fonction p, définie sur l'intervalle [0 ; 25] par $p(t) = \dfrac{1}{100}(-0{,}2t^2 + 4t + 25)$.

1. Quel était le pourcentage de personnes malades en janvier 2019 ? en février 2019 ?

2. a. Vérifier que -5 est une racine du polynôme $u(t) = -0{,}2t^2 + 4t + 25$.

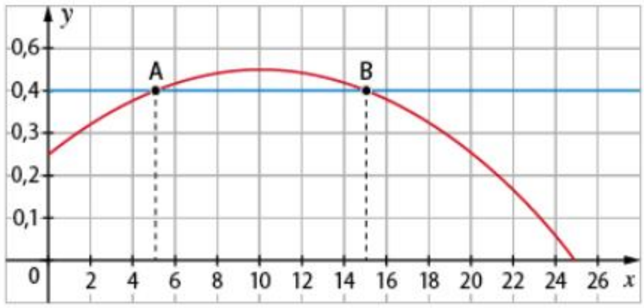
b. En déduire l'expression de $u(t)$, puis de $p(t)$ sous forme factorisée.

3. a. Étudier les variations de la fonction p sur [0 ; 25].

b. Déterminer au bout de combien de mois après le début de la campagne de vaccination la proportion de malades a été maximale. Quel était alors ce maximum ?

4. a. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction p.

b. Déterminer graphiquement durant combien de mois le pourcentage de personnes malades a été supérieur ou égal à 40 %.

COMPRENDRE L'ÉNONCÉ ET CHOISIR LES MÉTHODES	RÉPONSES
1. $p(1)$ est la proportion de malades au bout d'un mois, donc en février.	**1.** $p(0) = 0{,}25$ donc le pourcentage de personnes malades en janvier 2019 est 25 %. $p(1) = \frac{1}{100} \times (-0{,}2 \times 1 + 4 \times 1 + 25) = \frac{1}{100} \times 28{,}8 = 0{,}288$. Donc le pourcentage de personnes malades en février 2019 est 28,8 %.
2. Pour déterminer la seconde racine d'un polynôme du second degré connaissant la première, on se sert de la forme factorisée en égalant les coefficients de x^2, puis en calculant l'image de 0. Capacité 9, p. 115	**2. a.** $u(-5) = -0{,}2 \times 25 - 4 \times 5 + 25 = 0$, donc -5 est une racine de $u(t)$. **b.** Puisque -5 est une racine de $u(t)$, on peut écrire $u(t)$ sous forme factorisée : $u(t) = a(t+5)(t-t_2)$, avec a et t_2 des réels. Le coefficient du terme en t^2 de $a(t+5)(t-t_2)$ est a, donc $a = -0{,}2$. Ainsi, $u(t) = -0{,}2(t+5)(t-t_2)$. $u(0) = 25$ et $u(0) = -0{,}2 \times 5 \times (-t_2)$ en remplaçant dans l'expression précédente, donc $-0{,}2 \times 5 \times (-t_2) = 25$, ce qui donne $t_2 = 25$. On en déduit : $u(t) = -0{,}2(t+5)(t-25)$ et $p(t) = -0{,}002(t+5)(t-25)$.
3. Pour déterminer les variations d'une fonction polynôme du second degré écrite sous forme factorisée, on calcule d'abord la demi-somme de ses racines. Capacité 7, p. 114	**3. a.** $p(t)$ est une fonction polynôme du second degré sous forme factorisée, de racines -5 et 25. On calcule $\alpha = \frac{-5+25}{2} = 10$. Puisque le coefficient $-0{,}002$ est négatif, p est croissante sur [0 ; 10] et décroissante sur [10 ; 25]. D'où le tableau de variation ci-contre : t : 0 ; 10 ; 25 — $p(t)$: 0,25 ↗ 0,45 ↘ 0 **b.** La proportion de malades est maximale au bout de 10 mois, et la proportion maximale de malades a été 45 %.
4. Pour représenter graphiquement une fonction polynôme de degré 2, on place d'abord son sommet. Capacité 6, p. 114 Ne pas oublier que 40 % = 0,4. Puis utiliser la droite d'équation $y = 0{,}4$ pour la résolution graphique. Capacité 2, p. 110	**4. a.** La courbe de p est une partie de parabole de sommet S(10 ; 0,45). **b.** On doit déterminer les valeurs de t telles que $p(t) \geqslant 0{,}4$. On trace la droite d'équation $y = 0{,}4$. Elle coupe $\mathscr{C}$ en deux points A et B d'abscisses respectives 5 et 15. Donc $p(t) \geqslant 0{,}4$ si $t \in [5 ; 15]$.  Le pourcentage de malades a été supérieur ou égal à 40 % pendant 11 mois.

III. La dérivation en tronc commun

Fonction dérivée d'une fonction f

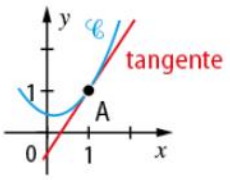
Taux de variation de f entre a et $a + h$ ($h \neq 0$)

$$r(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Nombre dérivé de f en a

$f'(a)$ est égal :
– à la limite de $r(h)$ quand h tend vers 0 ;
– à l'image de a par f' ;
– au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

Tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f



La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A(a ; $f(a)$) et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$.

Calcul de la dérivée f'

• **Dérivées des fonctions de référence**
Si $f(x) = k$ avec k réel, alors $f'(x) = 0$.
Si $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$.
Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.
Si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$.

• **Opérations sur les dérivées**
Soit u et v deux fonctions dérivables et k un réel.
– La dérivée de la fonction $u + v$ est la fonction $u' + v'$.
– La dérivée de la fonction ku est la fonction ku'.

Sens de variation de f et signe de f'

• **Du signe de f' aux variations de f sur un intervalle I**
Si $f'(x) \geqslant 0$ sur I, alors f est croissante sur I.
Si $f'(x) \leqslant 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.

• **Des variations de f au signe de f' sur un intervalle I**
Si f est croissante sur I, alors $f'(x) \geqslant 0$ sur I.
Si f est décroissante sur I, alors $f'(x) \leqslant 0$ sur I.

Applications

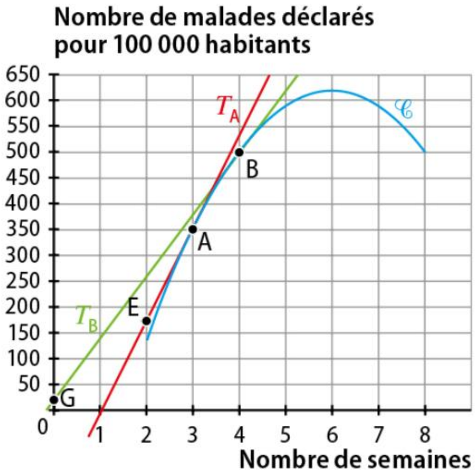
– Vitesse en physique
– Coût marginal en économie

ÉNONCÉ

On s'intéresse, pendant six semaines, à une épidémie de grippe. Le nombre de malades déclarés pour 100 000 habitants au bout de x semaines écoulées depuis le début de l'épidémie est modélisé par la fonction f, définie sur l'intervalle [2 ; 8] par :

$$f(x) = -30x^2 + 360x - 460.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f ; T_A la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A(3 ; 350) et T_B la tangente à $\mathscr{C}$ au point B(4 ; 500). E(2 ; 170) est un point de T_A et G(0 ; 20) est un point de T_B.



1. a. Déterminer $f'(3)$ par lecture graphique.

b. Déterminer par un calcul l'équation réduite de la tangente T_B.

c. On admet que le réel $f'(x)$ représente la vitesse de propagation de l'épidémie au bout de x semaines.
La grippe se propage-t-elle plus vite au bout de trois ou quatre semaines ? Justifier.

2. a. Calculer $f'(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [2 ; 8].

c. Construire le tableau de variation de f sur l'intervalle [2 ; 8].

3. Durant ces six semaines, quel a été le nombre maximal de malades déclarés pour 100 000 habitants ?

<table>
<tr><th>COMPRENDRE L'ÉNONCÉ ET CHOISIR LES MÉTHODES</th><th>RÉPONSES</th></tr>
<tr><td>1. a. $f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 3.
Capacité 1, p. 142</td><td>1. a. Le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 3 est A. Ainsi, $f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A. Cette droite passe par les points A(3 ; 350) et E(2 ; 170), donc son coefficient directeur est $\dfrac{350-170}{3-2}=180$. Par conséquent, $f'(3)=180$.</td></tr>
<tr><td>b. On commence par calculer le coefficient directeur de T_B, puis on utilise un point de cette tangente. Capacité 4, p. 143</td><td>b. Comme la droite T_B passe par B(4 ; 500) et G(0 ; 20), son coefficient directeur est $\dfrac{500-20}{4-0}=120$. Donc l'équation réduite de T_B est de la forme $y=120x+p$.
Comme G est un point de T_B, $20=p$. L'équation réduite de T_B est $y=120x+20$.</td></tr>
<tr><td>c. On doit comparer les vitesses au bout de 3 et 4 semaines, c'est-à-dire $f'(3)$ et $f'(4)$.</td><td>c. D'après les questions précédentes, $f'(3)=180$ et $f'(4)=120$ car $f'(4)$ est le coefficient directeur de T_B.
$f'(3)>f'(4)$, donc la grippe se propage plus vite au bout de trois semaines.</td></tr>
<tr><td>2. a. On doit dériver une fonction polynôme.
Capacités 5 et 6, p. 146</td><td>2. a. $f'(x)=-30\times 2x+360\times 1$.
Donc $f'(x)=-60x+360$.</td></tr>
<tr><td>b. On résout une inéquation.
Capacité 7, p. 147</td><td>b. $-60x+360\geqslant 0$ équivaut à $-60x\geqslant -360$, donc à $x\leqslant\dfrac{-360}{-60}$, soit $x\leqslant 6$.
On en déduit que, sur [2 ; 6], $f'(x)\geqslant 0$ et que sur [6 ; 8], $f'(x)\leqslant 0$.</td></tr>
<tr><td>c. On commence par donner le signe de $f'(x)$ dans la deuxième ligne du tableau.
Capacité 7, p. 147</td><td>c. On construit le tableau de variation de f que l'on complète en calculant $f(2)$, $f(6)$ et $f(8)$.
$$\begin{array}{|c|ccccc|}\hline x & 2 & & 6 & & 8 \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & 140 & \nearrow & 620 & \searrow & 500 \\ \hline\end{array}$$</td></tr>
<tr><td>3. On détermine le maximum de f en utilisant son tableau de variation. Capacité 7, p. 147</td><td>3. D'après le tableau de variation, le maximum de f sur [2 ; 8] est égal à 620. Au cours de ces six semaines, le nombre maximal de malades déclarés pour 100 000 habitants a donc été de 620.</td></tr>
</table>

IV. Probabilité conditionnelles

Probabilités conditionnelles

Expérience aléatoire : on choisit au hasard un individu dans une population dont la répartition est donnée par un tableau croisé d'effectifs.

• Soit A un événement : Card(A) est le nombre d'issues de cet événement.

• Soit A et B deux événements tels que Card(A) $\neq 0$.
La probabilité de B sachant A est égale à $P_A(B) = \dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$.

• Si la répartition est donnée par le tableau ci-contre et si A est l'événement « l'individu présente la valeur a du caractère C_1 » et B est l'événement : « l'individu présente la valeur b du caractère C_2 » alors $P_A(B) = \dfrac{e_1}{S_1}$.

Tableau croisé d'effectifs

C_1 \ C_2	b	b'	b''	Total
a	e_1	e_2	e_3	S_1
a'	e_4	e_5	e_6	S_2
Total	S_1'	S_2'	S_3'	T

e_1 est le nombre d'individus présentant simultanément la valeur a du caractère C_1 et la valeur b du caractère C_2.
S_1 est l'effectif marginal de la valeur a du caractère C_1 :
$S_1 = e_1 + e_2 + e_3$.

Fréquences conditionnelles et marginales

• $\dfrac{S_1}{T}$ est la fréquence marginale de la valeur a du caractère C_1.

• $\dfrac{e_1}{S_1}$ est la fréquence conditionnelle de la valeur b du caractère C_2 sachant la valeur a du caractère C_1.

• $\dfrac{e_1}{S'_1}$ est la fréquence conditionnelle de la valeur a du caractère C_1 sachant la valeur b du caractère C_2.

ÉNONCÉ

Lors d'un concours de karaoké, le public, composé de 450 personnes (dont 150 garçons), a voté pour l'un des trois finalistes : Hatxi, Élodie et Machyl.
Les voix sont réparties de la façon suivante :
• 45 garçons ont voté pour Hatxi ;
• 35 % des filles ont voté pour Élodie ;
• parmi les 165 personnes qui ont voté pour Machyl, il y a 20 % de garçons.

	Hatxi	Élodie	Machyl	Total
Garçons	45			150
Filles				
Total			165	450

1. Reproduire puis compléter le tableau ci-dessus.

2. a. Quelle est la fréquence marginale des garçons dans le public ?

b. Déterminer, à 0,01 près, la fréquence conditionnelle des filles parmi les personnes qui ont voté pour Élodie.

3. On choisit au hasard une personne du public. On suppose que tous les choix sont équiprobables et on considère les événements suivants :
A : « la personne choisie est un garçon » ; B : « la personne choisie a voté pour Machyl ».
Les résultats demandés seront donnés sous forme décimale arrondie au centième.

a. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_A(B)$.

b. Déterminer la probabilité que le jeune ait voté pour Haxti sachant que c'est une fille.

COMPRENDRE L'ÉNONCÉ ET CHOISIR LES MÉTHODES / RÉPONSES

1. Les effectifs donnés dans l'énoncé sont déjà inscrits dans le tableau. On commence par compléter par somme ou différence les lignes et les colonnes qui peuvent l'être. Puis on utilise les fréquences données dans l'énoncé en veillant à bien identifier l'ensemble auxquelles elles font référence. Capacité 2, p. 170

1. On calcule le nombre de filles dans le public : 450 – 150 = 300.
Les 35 % des filles qui ont voté pour Élodie représentent $300 \times 0{,}35 = 105$ personnes.
Parmi les 165 personnes qui ont voté pour Machyl, il y a 20 % de garçons donc ceux-ci sont $165 \times 0{,}2 = 33$. On place ce nombre à l'intersection de la ligne « Garçons » et de la colonne « Machyl ».
Le reste du tableau est complété par somme et différence.

	Hatxi	Élodie	Machyl	Total
Garçons	45	72	33	150
Filles	63	105	132	300
Total	108	177	165	450

2. a. Il s'agit de diviser le nombre de garçons par l'effectif total. Capacité 1, p. 170

2. a. Il y a 150 garçons dans le public et ce public est constitué de 450 personnes : la fréquence marginale des garçons dans le public est égale à $\frac{150}{450}$, soit $\frac{1}{3}$.

b. Il s'agit d'une fréquence conditionnelle : on identifie l'ensemble de référence qui est celui des électeurs d'Élodie. Capacité 1, p. 170

b. Il y a 177 personnes qui ont voté pour Élodie et parmi elles 105 sont des filles. La fréquence conditionnelle des filles parmi les personnes qui ont voté pour Élodie est égale à $\frac{105}{177}$ soit environ 0,59 à 0,01 près.

3. a. Pour calculer $P_A(B)$ on doit déterminer Card(A) et Card(A ∩ B). Capacité 3, p. 171

3. a. On a $P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$. Card(A) est le nombre d'issues qui réalisent l'événement A donc Card(A) = 150.
Card(A ∩ B) est le nombre d'issues qui réalisent à la fois l'événement A et l'événement B : Card(A ∩ B) = 33. On a donc $P_A(B) = \frac{33}{150}$, soit $P_A(B) = 0{,}22$.

b. Il s'agit de remarquer qu'on demande une probabilité conditionnelle, d'identifier les événements qui interviennent et de définir ceux qui ne le sont pas encore. Capacité 3, p. 171

b. On considère l'événement C « la personne a voté pour Hatxi ». On doit calculer $P_{\overline{A}}(C)$.
D'après le tableau, il y a 300 filles dans le public donc $\text{Card}(\overline{A}) = 300$, et il y a 63 filles qui ont voté pour Hatxi donc $\text{Card}(\overline{A} \cap C) = 63$.
On a donc $P_{\overline{A}}(C) = \frac{63}{300}$, soit $P_{\overline{A}}(C) = 0{,}21$.
La probabilité que le jeune ait voté pour Haxti sachant que c'est une fille est égale à 0,21.

V. Variables aléatoires

Variable aléatoire

Arbre de probabilités
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'une issue représentée par un chemin est le produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à cet événement.

Événements liés à la variable aléatoire X

$\{X = x_i\}$ est l'événement formé de toutes les issues associées au réel x_i.
$\{X < x_i\}$ (resp. $\{X \geqslant x_i\}$) est l'événement formé de toutes les issues associées à un réel strictement inférieur au réel x_i (resp. supérieur ou égal au réel x_i).

Loi de probabilité de la variable aléatoire X

X prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

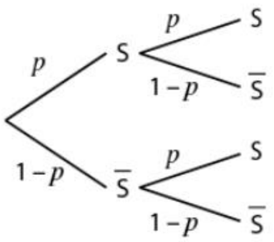
x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_n) = 1$

Expérience aléatoire à plusieurs épreuves indépendantes

Répétition d'épreuves identiques et indépendantes de Bernoulli

p est la probabilité du succès S à chaque épreuve.



Espérance de la variable aléatoire X

$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$

Interprétation : $E(X)$ est la valeur moyenne des valeurs prises par X lorsque l'expérience est répétée un très grand nombre de fois.

Loi de Bernoulli de paramètre p

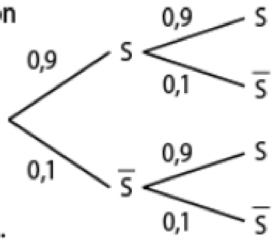
$P(X = 0) = 1 - p$; $P(X = 1) = p$ et $E(X) = p$

ÉNONCÉ

Cosmos est un jeune chien très habile à rattraper les balles qu'on lui lance : la probabilité qu'il rattrape la balle est égale à 0,9. Il n'est pas le seul chien à jouer à rattraper la balle : un classement a été proposé par un jury qui fait régulièrement des concours de rattrapage de balle ! Une manche consiste à lancer de façon identique et indépendante deux balles à rattraper. Cosmos participe à une manche.
Il y a succès lorsque Cosmos attrape la balle ; on le note S.

1. a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
b. Calculer la probabilité que Cosmos attrape une balle exactement.
c. Calculer la probabilité que Cosmos attrape au moins une balle.

2. Le chien gagne 100 points pour deux balles rattrapées, 30 points pour une seule balle rattrapée ; il perd 50 points s'il ne rattrape aucune balle. On appelle B la variable aléatoire donnant le nombre de points d'une manche jouée.
a. Donner la loi de probabilité de B.
b. Calculer $E(B)$.
c. Cosmos a joué 300 manches cette année. Estimer son gain total.

COMPRENDRE L'ÉNONCÉ ET CHOISIR LES MÉTHODES	RÉPONSES
1. a. Identifier qu'il y a répétition de deux épreuves identiques et indépendantes dont la probabilité du succès est 0,9. Capacité 3, p. 193	**1. a.** L'épreuve consiste à lancer la balle deux fois de façon identique et indépendante. On construit un arbre à deux niveaux en plaçant à l'extrémité de chaque branche S ou $\overline{S}$. L'énoncé donne : $P(S) = 0{,}9$ donc $P(\overline{S}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. On place ces probabilités sur les branches correspondantes et on obtient l'arbre demandé ci-contre. 
b. L'événement est constitué de deux issues. Calculer la probabilité de chaque issue avec le produit des probabilités lues sur le chemin correspondant. Capacité 4, p. 193	**b.** L'événement « Cosmos attrape une balle exactement » est formé des deux issues $S\overline{S}$ et $\overline{S}S$, qui ont toutes les deux la même probabilité. La probabilité que Cosmos attrape exactement une balle est $2 \times 0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}18$.
c. Calculer la probabilité d'un événement contraire.	**c.** L'événement « Cosmos attrape au moins une balle » est l'événement contraire de l'événement « Cosmos n'attrape aucune balle », qui est constitué de la seule issue $\overline{S}\,\overline{S}$ et dont la probabilité est $0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$. La probabilité cherchée est donc $1 - 0{,}01 = 0{,}99$.
2. a. Déterminer les valeurs prises par B puis leurs probabilités. Capacité 5, p. 196	**2. a.** B prend les valeurs -50, 30 et 100. On calcule pour chaque issue la valeur de B, puis on calcule sa probabilité. D'après la question **1. b.**, on a $P(B = 30) = 0{,}18$. L'événement $\{B = 100\}$ est constitué de l'issue SS. Donc $P(B = 100) = 0{,}9 \times 0{,}9$ soit $P(B = 100) = 0{,}81$. L'événement $\{B = -50\}$ est constitué de l'issue $\overline{S}\,\overline{S}$. Donc $P(B = -50) = 0{,}1 \times 0{,}1$ soit $P(B = -50) = 0{,}01$. On peut donner la loi de probabilité de B :
b. Utiliser la formule de l'espérance. Capacité 6, p. 196	**b.** $E(B) = 0{,}01 \times (-50) + 0{,}18 \times 30 + 0{,}81 \times 100 = 85{,}9$.
c. Interpréter l'espérance. Capacité 6, p. 196	**c.** En effectuant un très grand nombre de manches, Cosmos gagnera en moyenne 85,9 points par manche. Pour 300 manches, son gain total est estimé à $300 \times 85{,}9 = 25\,770$ points.

k	-50	30	100
$P(X = k)$	0,01	0,18	0,81