Fiche de révisions

Exercice 1

1) Ecrire les nombres ci-dessous sous la forme d'une fraction irréductible.

$A = 49 \times \frac{5}{21}$ $\quad B = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + 3\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right)$ $\quad C = \frac{5 + \frac{5}{6}}{\frac{7}{2}}$ $\quad D = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{6} \times 3}{2}$

2) Ecrire les nombres suivants sous la forme a^n où a est un nombre réel et n, un entier relatif.

$A = \frac{7^8 \times 7^{-5}}{7^6}$ $\quad B = \frac{(21^{-5})^2}{3^{-10}}$ $\quad C = \frac{(5 - 2 \times 3)^4}{(2-5)^5}$ $\quad D = \frac{16^{25}}{2^{100}}$

3) a) Soit $A = \sqrt{8} \times \sqrt{2}$. Montrer que A est un nombre entier.

b) Ecrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est un entier relatif et b, un entier naturel le plus petit possible.

$A = \sqrt{50}$ $\quad B = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{2}}$ $\quad C = \sqrt{7} \times \sqrt{35}$ $\quad D = \sqrt{2} - 4\sqrt{8} + 2\sqrt{18}$

Exercice 2

1) Développer les expressions ci-dessous en utilisant une identité remarquable.

$A = (x+5)^2$ $\quad B = (10x - 2)^2$ $\quad C = \left(2x + \frac{5}{2}\right)^2$

$D = (2x-3)(2x+3)$ $\quad E = (\sqrt{7} - 4x)(\sqrt{7} + 4x)$ $\quad F = (x+1)^2 - \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

2) Factoriser (au maximum) les expressions suivantes.

$A = 12x^3 - 3x$ $\quad B = (x+2)(4x+3) - (7x-8)(x+2)$

3) Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'une identité remarquable.

$A = x^2 - 6x + 9$ $\quad B = x^2 - 1$ $\quad C = 81x^2 - \frac{y^2}{4}$ $\quad D = 16 - (8x-6)^2$

Exercice 3

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$(E_1) : 7x + 8 = 2x - 9$ $\quad (E_2) : x - 10 = 2x - 7$ $\quad (E_3) : \frac{5 - 8x}{x - 2} = 3$

$(E_4) : (3x-5)(2x+6) = 0$ $\quad (E_5) : (x-4)^2 = 36$ $\quad (E_6) : x + 1 = \frac{9}{x+1}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$(I_1) :\ 5x - 3 \leq 2x + 6$ $\qquad$ $(I_2) : 2x + 3 < 9x - 2$

$(I_3) :\ (x - 8)(-2 - 10x) \leq 0$ $\qquad$ $(I_4) : \dfrac{-2x + 3}{x + 4} \geq 0$

Exercice 4

Soit $A(-2\,;\,-1)$, $B(4\,;0)$, $C(5\,;4)$ et $D(-1\,;3)$ quatre points du plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1) Faire une figure.

2) Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

3) a) Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB}$.
b) Déterminer par le calcul les coordonnées du point E.
c) Les points C, B et E sont-ils alignés ? Justifier à l'aide de calculs.

4) Soit F le point tel que $\overrightarrow{AF} = -5\overrightarrow{AD}$.
a) Montrer par le calcul que F a pour coordonnées $F(-7\,;\,-21)$.
b) Les droites (DF) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier à l'aide de calculs.

Exercice 5

1) On munit le plan d'un repère orthogonal (O, I, J) et on considère les points $A(4\,;\,2)$, $B(-3\,;6)$, $C(4\,;6)$, $D(-1\,;-2)$ et $E(4\,;-2)$.
Déterminer par le calcul les équations des droites (AB), (CD) et (DE).

2) Dans un même repère, tracer les droites dont les équations sont données ci-dessous.

a) $\Delta_1 : y = 5x - 2$ $\quad$ **b)** $\Delta_2 :\ y = 1$ $\quad$ **c)** $\Delta_3\ : y = -\frac{2}{3}x + 1$ $\quad$ **d)** $\Delta_4 : x = -1$.

Exercice 6

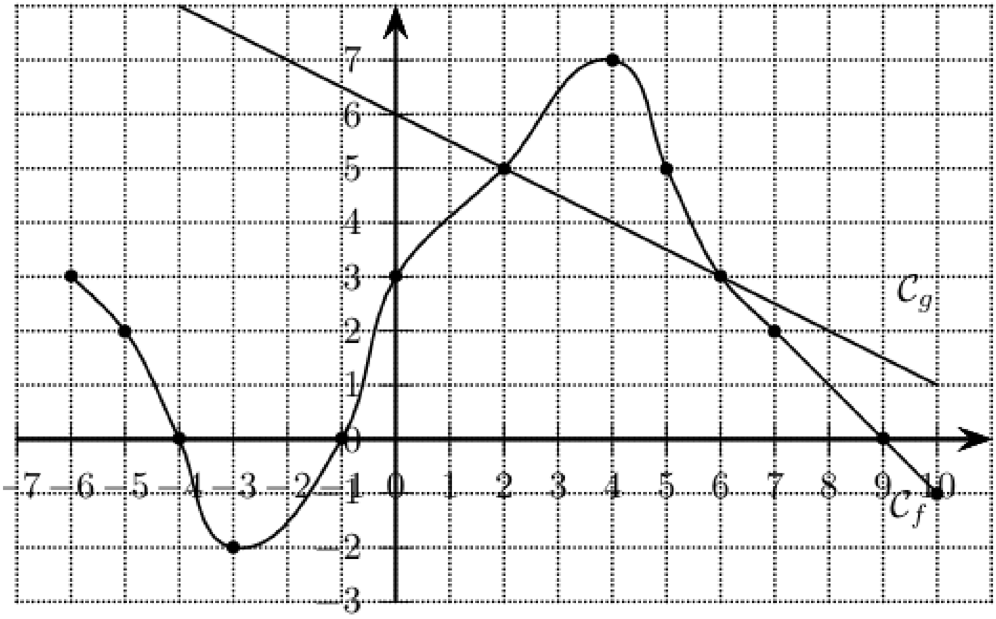
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 9)^2 - 1$.

1) Développer et réduire $f(x)$.
2) Factoriser $f(x)$.
3) Déterminer l'image de 0 par la fonction f.
4) Déterminer le(s) éventuel(s) antécédent(s) par la fonction f des nombres suivants.

a) 0 $\qquad$ **b)** 80 $\qquad$ **c)** -1

Exercice 7

On a tracé ci-dessous les courbes représentatives C_f et C_g de deux fonctions f et g.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique, sauf lorsqu'il est précisé de justifier par le calcul (question 8).

1) Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2) a) Donner l'image de -3 par la fonction f.
b) Donner les antécédents de -3 et de 0 par f.

3) Résoudre l'équation $f(x) = 3$.

4) Déterminer les extrema de la fonction f. Préciser en quelles valeurs ils sont atteints.

5) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.
b) Dresser le tableau de signes de la fonction f sur son ensemble de définition.

6) a) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
b) Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$.

7) On admet que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et que C_g est une droite.
Montrer que $g(x) = -\frac{1}{2}x + 6$.

8) Déterminer par le calcul les éventuels antécédents de 7 par la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Fiche de révisions

Exercice 1

1)

$A = 49 \times \frac{5}{21}$ $A = 7 \times 7 \times \frac{5}{7 \times 3}$ $A = \frac{7 \times 5}{3} = \mathbf{\frac{35}{3}}$	$B = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + 3\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right)$ $B = \frac{8}{12} - \frac{9}{12} + 3\left(\frac{24}{30} - \frac{25}{30}\right)$ $B = -\frac{1}{12} + 3 \times \left(-\frac{1}{30}\right)$ $B = -\frac{1}{12} - \frac{1}{10} = -\frac{5}{60} - \frac{6}{60} = -\mathbf{\frac{11}{60}}$
$C = \frac{5 + \frac{5}{6}}{\frac{7}{2}}$ $C = \frac{\frac{30}{6} + \frac{5}{6}}{\frac{7}{2}} = \frac{\frac{35}{6}}{\frac{7}{2}}$ $C = \frac{35}{6} \times \frac{2}{7} = \frac{7 \times 5 \times 2}{2 \times 3 \times 7} = \mathbf{\frac{5}{3}}$	$D = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{6} \times 3}{2}$ $D = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{2 \times 3} \times 3}{2}$ $D = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{10}{4}}{2}$ $D = \frac{-\frac{7}{4}}{2} = -\frac{7}{4} \times \frac{1}{2} = -\mathbf{\frac{7}{8}}$

2)

$A = \frac{7^8 \times 7^{-5}}{7^6}$ $A = \frac{7^{8+(-5)}}{7^6}$ $A = \frac{7^3}{7^6} = 7^{3-6} = \mathbf{7^{-3}}$	$B = \frac{(21^{-5})^2}{3^{-10}}$ $B = \frac{21^{-5\times 2}}{3^{-10}} = \frac{21^{-10}}{3^{-10}}$ $B = \left(\frac{21}{3}\right)^{-10} = \mathbf{7^{-10}}$	$C = \frac{(5 - 2 \times 3)^4}{(2-5)^5}$ $C = \frac{(5-6)^4}{(2-5)^5}$ $C = \frac{(-1)^4}{(-3)^5} = \frac{1}{(-3)^5}$ $\boldsymbol{C = \left(-\frac{1}{3}\right)^5}$	$D = \frac{16^{25}}{2^{100}}$ $D = \frac{(2^4)^{25}}{2^{100}} = \frac{2^{4\times 25}}{2^{100}}$ $D = \frac{2^{100}}{2^{100}} = \mathbf{1}$

3) a) $A = \sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = \mathbf{4}$ donc le nombre A est bien entier.

b)

$A = \sqrt{50}$ $A = \sqrt{25 \times 2}$ $A = \sqrt{25} \times \sqrt{2}$ $A = \mathbf{5\sqrt{2}}$	$B = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{36}{2}}$ $B = \sqrt{18}$ $B = \sqrt{9 \times 2}$ $B = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \mathbf{3\sqrt{2}}$	$C = \sqrt{7} \times \sqrt{35}$ $C = \sqrt{7} \times \sqrt{7 \times 5}$ $C = \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{5}$ $C = \mathbf{7\sqrt{5}}$	$D = \sqrt{2} - 4\sqrt{8} + 2\sqrt{18}$ $D = \sqrt{2} - 4\sqrt{4 \times 2} + 2\sqrt{9 \times 2}$ $D = \sqrt{2} - 4 \times \sqrt{4} \times \sqrt{2} + 2\sqrt{9} \times \sqrt{2}$ $D = \sqrt{2} - 4 \times 2 \times \sqrt{2} + 2 \times 3 \times \sqrt{2}$ $D = \sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$ $D = (1 - 8 + 6)\sqrt{2} = \mathbf{-\sqrt{2}}$

Exercice 2

1)

$A = (x+5)^2$ $A = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2$ $\boldsymbol{A = x^2 + 10x + 25}$	$B = (10x-2)^2$ $B = (10x)^2 - 2 \times 10x \times 2 + 2^2$ $\boldsymbol{B = 100x^2 - 40x + 4}$	$C = \left(2x + \frac{5}{2}\right)^2$ $C = (2x)^2 + 2 \times 2x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$ $\boldsymbol{C = 4x^2 + 10x + \frac{25}{4}}$
$D = (2x-3)(2x+3)$ $D = (2x)^2 - 3^2$ $\boldsymbol{D = 4x^2 - 9}$	$E = (\sqrt{7} - 4x)(\sqrt{7} + 4x)$ $E = \left(\sqrt{7}\right)^2 - (4x)^2$ $\boldsymbol{E = 7 - 16x^2}$	$F = (x+1)^2 - \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ $F = x^2 + 2x + 1 - \left(x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$ $F = x^2 + 2x + 1 - \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)$ $F = x^2 + 2x + 1 - x^2 + \frac{1}{9}$ $F = 2x + \frac{9}{9} + \frac{1}{9} = \boldsymbol{2x + \frac{10}{9}}$

2)

$A = 12x^3 - 3x$ $A = 3x \times 4x^2 - 3x \times 1$ $\boldsymbol{A = 3x(4x^2 - 1)}$ Pour aller plus loin : $A = 3x(2x-1)(2x+1)$	$B = (x+2)(4x+3) - (7x-8)(x+2)$ $B = (x+2)\big(4x+3-(7x-8)\big)$ $B = (x+2)(4x+3-7x+8)$ $\boldsymbol{B = (x+2)(-3x-5)}$

3)

$A = x^2 - 6x + 9$ $A = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2$ $\boldsymbol{A = (x-3)^2}$ $B = x^2 - 1$ $\boldsymbol{B = (x-1)(x+1)}$	$C = 81x^2 - \frac{y^2}{4}$ $C = (9x)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2$ $C = \boldsymbol{\left(9x - \frac{y}{2}\right)\left(9x + \frac{y}{2}\right)}$	$D = 16 - (8x-6)^2$ $D = 4^2 - (8x-6)^2$ $D = \big(4-(8x-6)\big)(4+8x-6)$ $D = (4-8x+6)(8x-2)$ $\boldsymbol{D = (-8x+10)(8x-2)}$

Exercice 3

1)

Soit $x \in \mathbb{R}$. $(E_1) : 7x + 8 = 2x - 9$ $(E_1) \Leftrightarrow 7x - 2x = -9 - 8$ $(E_1) \Leftrightarrow 5x = -17$ $(E_1) \Leftrightarrow x = -\frac{17}{5}$ L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est : $\boldsymbol{S} = \left\{-\frac{17}{5}\right\}$	Soit $x \in \mathbb{R}$. $(E_2) :\ x - 10 = 2x - 7$ $(E_2) \Leftrightarrow x - 2x = -7 + 10$ $(E_2) \Leftrightarrow -x = 3$ $(E_2) \Leftrightarrow x = -3$ L'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est : $\boldsymbol{S} = \{-3\}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $(E_3) : \dfrac{5-8x}{x-2} = 3$ $(E_3) \Leftrightarrow x-2 \neq 0 \ \ et \ \dfrac{5-8x}{x-2} \times (x-2) = 3(x-2)$ $(E_3) \Leftrightarrow x \neq 2 \quad et \ \ 5-8x = 3(x-2)$ $(E_3) \Leftrightarrow x \neq 2 \quad et \ \ 5-8x = 3x-6$ $(E_3) \Leftrightarrow x \neq 2 \quad et \ -8x-3x = -6-5$ $(E_3) \Leftrightarrow x \neq 2 \quad et \ -11x = -11$ $(E_3) \Leftrightarrow x \neq 2 \quad et \quad x = 1$ L'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est : $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{1}\}$	Soit $x \in \mathbb{R}$. $(E_4) : (3x-5)(2x+6) = 0$ $(E_4) \Leftrightarrow 3x-5 = 0 \quad ou \ \ 2x+6 = 0$ $(E_4) \Leftrightarrow \ \ 3x = 5 \qquad ou \ \ 2x = -6$ $(E_4) \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3} \qquad ou \ x = -\dfrac{6}{2} = -3$ L'ensemble des solutions de l'équation (E_4) est : $\boldsymbol{S} = \left\{\mathbf{-3}\,; \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right\}$
Soit $x \in \mathbb{R}$. $(E_5) : (x-4)^2 = 36$ $(E_5) \Leftrightarrow (x-4)^2 - 36 = 0$ $(E_5) \Leftrightarrow (x-4)^2 - 6^2 = 0$ $(E_5) \Leftrightarrow (x-4-6)(x-4+6) = 0$ $(E_5) \Leftrightarrow (x-10)(x+2) = 0$ $(E_5) \Leftrightarrow x-10 = 0 \quad ou \quad x+2 = 0$ $(E_5) \Leftrightarrow x = 10 \qquad ou \quad x = -2$ L'ensemble des solutions de l'équation (E_5) est : $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{-2}\,; \mathbf{10}\}$	Soit $x \in \mathbb{R}$. $(E_6) : \ x+1 = \dfrac{9}{x+1}$ $(E_6) \Leftrightarrow x+1 \neq 0 \ \ et \ (x+1)\times(x+1) = \dfrac{9}{x+1} \times (x+1)$ $(E_6) \Leftrightarrow x \neq -1 \ \ et \ (x+1)^2 = 9$ $(E_6) \Leftrightarrow x \neq -1 \ \ et \ (x+1)^2 - 9 = 0$ $(E_6) \Leftrightarrow x \neq -1 \ \ et \ (x+1-3)(x+1+3) = 0$ $(E_6) \Leftrightarrow x \neq -1 \ \ et \ (x-2)(x+4) = 0$ $(E_6) \Leftrightarrow x = 2 \ et \ x = -4$ L'ensemble des solutions de l'équation (E_6) est **:** $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{-4}\ ; \mathbf{2}\}$

2)

Soit $x \in \mathbb{R}$. $(I_1) : \ 5x-3 \leq 2x+6$ $(I_1) \Leftrightarrow 5x-2x \leq 6+3$ $(I_1) \Leftrightarrow 3x \leq 9$ $(I_1) \Leftrightarrow \dfrac{3x}{3} \leq \dfrac{9}{3} \qquad car\ 3 > 0$ $(I_1) \Leftrightarrow x \leq 3$ L'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est **:** $\boldsymbol{S} = \ ]-\infty\,; \ \mathbf{3}]$	Soit $x \in \mathbb{R}$. $(I_2) : 2x+3 < 9x-2$ $(I_2) \Leftrightarrow 2x-9x < -2-3$ $(I_2) \Leftrightarrow -7x < -5$ $(I_2) \Leftrightarrow \dfrac{-7x}{-7} > \dfrac{-5}{-7} \qquad car\ \ -7 < 0$ $(I_2) \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{7}$ L'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est : $\boldsymbol{S} = \left]\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}; \ +\infty\right[$

$(I_3) : \ (x-8)(-2-10x) \leq 0$

- $x-8 = 0 \Leftrightarrow x = 8$ et $x-8 > 0 \Leftrightarrow x > 8$

- $-2-10x$ est l'expression d'une fonction affine dont le taux d'accroissement a est -10.
  De plus : $-2-10x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$

Nous obtenons le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		8		$+\infty$
Signe de $x-8$		-		-	0	+	
Signe de $-2-10x$ $(a=-10<0)$		+	0	-		-	
Signe de $(x-8)(-2-10x)$		-	0	+	0	-	

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I_3) est : $\boldsymbol{S} = \left]-\infty; -\frac{1}{5}\right] \cup [\mathbf{8}\,;\ +\infty[$

$$(I_4) : \frac{-2x+3}{x+4} \geq 0$$

- Le quotient $\frac{-2x+3}{x+4}$ n'est pas défini si $x+4=0$, c'est-à-dire si $x=-4$.
- $-2x+3$ est l'expression d'une fonction affine dont le taux d'accroissement a est -2.
  De plus : $-2x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$
- $x+4$ est l'expression d'une fonction affine dont le taux d'accroissement a est 1.
  De plus : $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$

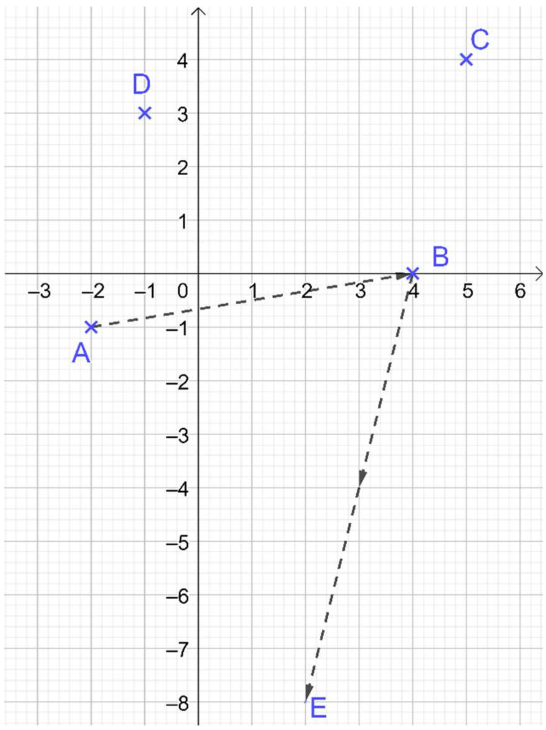
x	$-\infty$		-4		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $-2x+3$ $(a=-2<0)$		+		+	0	-	
Signe de $x+4$ $(a=1>0)$		-	0	+		+	
Signe de $\frac{-2x+3}{x+4}$		-	$\Vert$	+	0	-	

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I_3) est : $\boldsymbol{S} = \left]-\mathbf{4}; \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right]$

Exercice 4

2) Montrons que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

> $\overrightarrow{AD}\binom{x_D - x_A}{y_D - y_A}$ soit $\overrightarrow{AD}\binom{-1-(-2)}{3-(-1)}$. D'où $\overrightarrow{AD}\binom{1}{4}$.
>
> $\overrightarrow{BC}\binom{5-4}{4-0}$ soit $\overrightarrow{BC}\binom{1}{4}$.
>
> Nous obtenons $\boldsymbol{\overrightarrow{AD}} = \boldsymbol{\overrightarrow{BC}}$ donc ABCD est bien un parallélogramme.



3) b) Déterminons les coordonnées $(x_E\,; y_E)$ du point E.

> $\overrightarrow{AE}\binom{x_E-(-2)}{y_E-(-1)}$ soit $\overrightarrow{AE}\binom{x_E+2}{y_E+1}$
>
> Or, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB}$. Nous avons donc :
> $x_{\overrightarrow{AE}} = x_{\overrightarrow{AB}} + 2x_{\overrightarrow{CB}}$ avec $x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = 4-(-2) = 6$
> $y_{\overrightarrow{AE}} = y_{\overrightarrow{AB}} + 2y_{\overrightarrow{CB}}$ avec $y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = 0-(-1) = 1$
>
> D'où : $x_E + 2 = 6 + 2\times(-1)$ $\ et\ $ $y_E + 1 = 1 + 2\times(-4)$
> Soit : $x_E + 2 = 4$ $\qquad et\ y_E + 1 = -7$
> Ainsi, $x_E = 2\ \ et\ y_E = -8$, soit $\boldsymbol{E(2\,;\,-8)}$.

c) Les points C, B et E semblent alignés. Vérifions par le calcul.

Nous avons $\overrightarrow{BC}\binom{1}{4}$ et $\overrightarrow{BE}\binom{2-4}{-8-0}$ soit $\overrightarrow{BE}\binom{-2}{-8}$.

Donc $\det(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BE}) = 1\times(-8) - 4\times(-2) = -8+8 = \mathbf{0}$.
$\det(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BE}) = 0$ donc les points **B, C et E sont alignés**.

Autre raisonnement :
$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}$ d'après la relation de Chasles.
$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CB}$
Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires donc les points C, B et E sont bien alignés.

4) **a)** Montrons que F a pour coordonnées $F(-7\,;\,-21)$.

Soit $(x_F\,;y_F)$ les coordonnées du point F.
Puisque $\overrightarrow{AF} = -5\overrightarrow{AD}$, nous avons $x_{\overrightarrow{AF}} = -5x_{\overrightarrow{AD}}$ et $y_{\overrightarrow{AF}} = -5y_{\overrightarrow{AD}}$.
Soit : $x_F + 2 = -5\times 1 = -5$ et $y_F + 1 = -5\times 4 = -20$
D'où $\boldsymbol{x_F = -7}$ et $\boldsymbol{y_F = -21}$. F a bien pour coordonnées $F(-7\,;\,-21)$.

b) Vérifions si les droites (DF) et (BC) sont parallèles.

$\overrightarrow{DF}\binom{-7-(-1)}{-21-3}$ soit $\overrightarrow{DF}\binom{-6}{-24}$. Or $\overrightarrow{BC}\binom{1}{4}$. On en déduit que $\boldsymbol{\overrightarrow{DF} = -6\overrightarrow{BC}}$.
(On peut aussi calculer : $\det(\overrightarrow{DF}\,;\,\overrightarrow{BC}) = (-6)\times 4 - (-24)\times 1 = -24+24 = \mathbf{0}$.)
Les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{AD}$ sot colinéaires donc les droites (DF) et (BC) sont parallèles.

<u>Exercice 5</u>

1) Soient les points $A(4\,;\,2)$, $B(-3\,;6)$, $C(4\,;6)$, $D(-1\,;-2)$ et $E(4\,;-2)$.

- <u>Déterminons l'équation réduite de la droite (AB).</u>

  L'équation réduite de la droite (AB) est de la forme $y = ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.

  Le coefficient directeur de (AB) est : $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2-6}{4-(-3)} = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}$
  Une équation de la droite (AB) est donc $y = -\frac{4}{7}x + b$.

  <u>Cherchons la valeur b</u>.
  $A \in (AB)$ donc ses coordonnées $(x_A\,;y_A)$ vérifient : $y_A = -\frac{4}{7}x_A + b$
  Soit : $2 = -\frac{4}{7}\times 4 + b$.
  Nous obtenons ainsi $2 = -\frac{16}{7} + b$ et donc $b = 2 + \frac{16}{7} = \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{7}}$

  L'équation réduite de la droite (AB) est donc $\boldsymbol{y = -\frac{4}{7}x + \frac{30}{7}}$.

- <u>Déterminons une équation cartésienne de la droite (CD)</u>.

  Une équation cartésienne de la droite (CD) est de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont deux nombres réels, a et b n'étant pas nuls tous les deux. Dans ce cas, le vecteur de coordonnées $\binom{-b}{a}$ est un vecteur directeur de (CD).

  Or $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur directeur de (CD) et a pour coordonnées $\overrightarrow{CD}\binom{-1-4}{-2-6}$ soit $\overrightarrow{CD}\binom{-5}{-8}$. Posons donc $-b = -5$, soit $\boldsymbol{b = 5}$ et $\boldsymbol{a = -8}$
  Une équation cartésienne de (CD) est donc $-8x + 5y + c = 0$

  <u>Cherchons la valeur c</u>.
  $D \in (CD)$ donc ses coordonnées $(x_D\,; y_D)$ vérifient : $-8x_D + 5y_D + c = 0$.
  Soit $-8 \times (-1) + 5 \times (-2) + c = 0$.
  Nous obtenons ainsi $-2 + c = 0$ et donc $\boldsymbol{c = 2}$.

  Une équation cartésienne de la droite (CD) est $\boldsymbol{-8x + 5y + 2 = 0}$.
  (En exprimant y en fonction de x nous obtenons que l'équation réduite de (CD) est $\boldsymbol{y = \frac{8}{5}x - \frac{2}{5}}$)

- <u>Déterminons l'équation réduite de la droite (DE).</u>

  L'équation réduite de la droite (DE) est de la forme $y = ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.

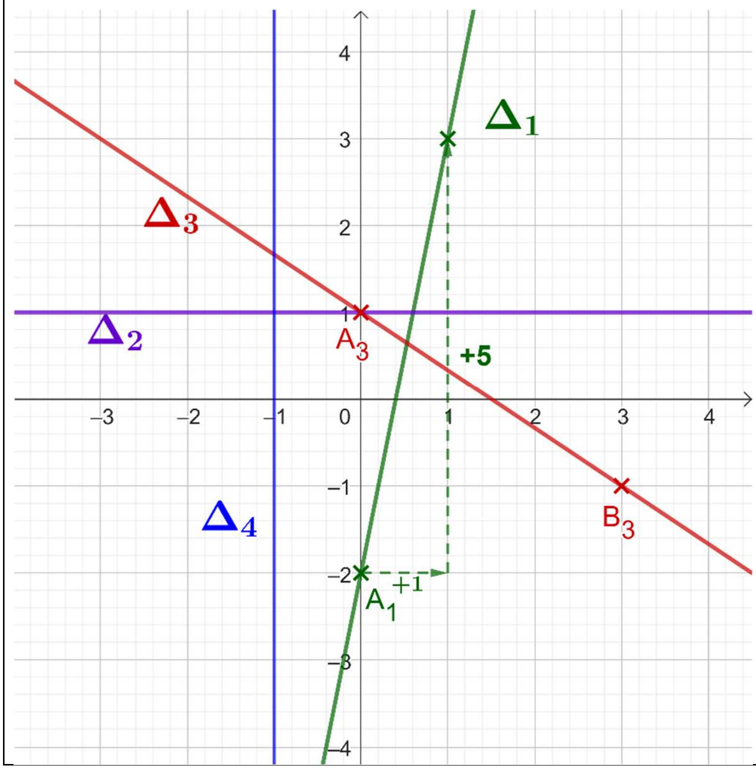
  Le coefficient directeur de (DE) est : $a = \frac{y_E - y_D}{x_E - x_D} = \frac{-2-(-2)}{-1-4} = \mathbf{0}$
  Une équation de la droite (DE) est donc $y = b$.

  <u>Cherchons la valeur b</u>.
  $E \in (DE)$ donc ses coordonnées $(x_E\,; y_E)$ vérifient : $y_E = b$
  Soit : $\boldsymbol{-2 = b}$.

  L'équation réduite de la droite (DE) est donc $\boldsymbol{y = -2}$.

2) Représentons les droites :

a) $\Delta_1 : y = 5x - 2$ **b)** $\Delta_2 : \ y = 1$ **c)** $\Delta_3 : y = -\frac{2}{3}x + 1$ **d)** $\Delta_4 : x = -1$.



a) L'ordonnée à l'origine est -2 donc $A_1(0\,;\,-2) \in \Delta_1$
Le coefficient directeur est 5 donc, graphiquement, si nous ajoutons une unité à l'abscisse de A_1, il faut ajouter 5 unités à l'ordonnée de A_1.

c) Pour tracer Δ_3, nous pouvons faire comme pour Δ_1 ou calculer les coordonnées de deux points de Δ_3 :

* pour $x = 0, y = -\frac{2}{3} \times 0 + 1 = 1$
  donc $A_3(0\,;\,1) \in \Delta_3$;

* pour $x = 3, y = -\frac{2}{3} \times 3 + 1 = -1$
  donc $B_3(3\,;-1) \in \Delta_3$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-9)^2 - 1$.

1) Développons $f(x)$.

Pour tout réel x :

$$f(x) = (2x-9)^2 - 1$$
$$f(x) = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 9 + 9^2 - 1$$
$$\boldsymbol{f(x) = 4x^2 - 36x + 80}$$

2) Factorisons $f(x)$.

Pour tout réel x :

$$f(x) = (2x-9)^2 - 1$$
$$f(x) = (2x-9)^2 - 1^2$$
$$f(x) = (2x-9-1)(2x-9+1)$$
$$\boldsymbol{f(x) = (2x-10)(2x-8)}$$

3) Calculons l'image de 0 par la fonction f en utilisant la forme développée de $f(x)$.

$f(0) = 4 \times 0^2 - 36 \times 0 + 80 = 80$ donc l'image de 0 par f est donc **80.**

4)

a) Déterminons le(s) antécédent(s) de 0 par f en utilisant la forme factorisée de $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\Leftrightarrow (2x-10)(2x-8)=0 \\ &\Leftrightarrow 2x-10=0 \quad \text{ou} \quad 2x-8=0 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{10}{2}=5 \quad \text{ou} \quad x=\frac{8}{2}=4 \\ &\Leftrightarrow x=5 \quad \text{ou} \quad x=4 \end{aligned}$$

Les antécédents de 0 par f sont donc **4** et **5**.

b) Déterminons le(s) antécédent(s) de 80 par f en utilisant la forme développée de $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x)=80 &\Leftrightarrow 4x^2-36x+80=80 \\ &\Leftrightarrow 4x^2-36x=0 \\ &\Leftrightarrow 4x(x-9)=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x-9=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x=9 \end{aligned}$$

Les antécédents de 80 par f sont **0** et **9**.

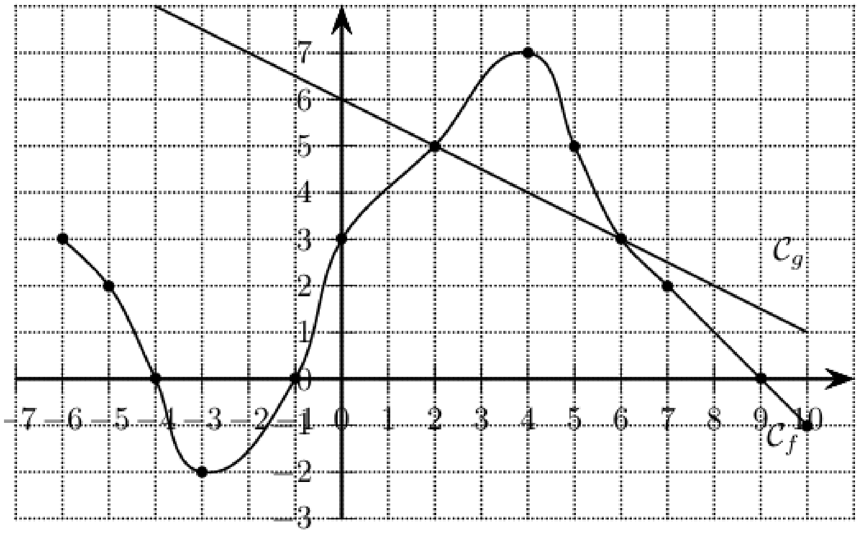
c) Déterminons le(s) antécédent(s) de -1 par f en utilisant la forme initiale de $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x)=-1 &\Leftrightarrow (2x-9)^2-1=-1 \\ &\Leftrightarrow (2x-9)^2=0 \\ &\Leftrightarrow 2x-9=0 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{9}{2} \end{aligned}$$

L'antécédent de -1 par f est $\mathbf{\frac{9}{2}}$.

Exercice 7

On a tracé ci-dessous les courbes représentatives C_f et C_g de deux fonctions f et g.



1) La fonction f est définie sur $[-6\,;10]$.

2) a) L'image de -3 par la fonction f est -2.

b) -3 n'a pas d'antécédent par f et les antécédents de 0 par f sont $\mathbf{-4\,;-1}$ et $\mathbf{10}$.

3) Les solutions de l'équation $f(x)=3$ sont $\mathbf{-6\,;0}$ et $\mathbf{6}$.

3) La fonction f admet un **minimum atteint en** $\boldsymbol{x = -3}$ et ce minimum **vaut** $\boldsymbol{-2}$.
Cette fonction admet aussi un **maximum atteint en** $\boldsymbol{x = 4}$ et ce maximum **vaut** $\boldsymbol{7}$.

4) a) Par lecture graphique, nous obtenons le tableau de variations ci-dessous pour la fonction f :

x	-6		-3		4		10
Variation de f	3	↘	-2	↗	7	↘	-1

b) Par lecture graphique, nous obtenons le tableau de signes ci-dessous pour la fonction f :

x	-6		-4		-1		9		10
Signe de $f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

5) a) Nous pouvons lire graphiquement que les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont $\boldsymbol{x = 2}$ et $\boldsymbol{x = 4}$.

b) Nous pouvons lire graphiquement que les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les nombres x appartenant à l'intervalle $]\mathbf{2}\,;\mathbf{6}[$.

6) Montrons que $g(x) = -\frac{1}{2}x + 6$.

C_g est une droite donc la fonction g est affine et possède une expression de la forme $g(x) = ax + b$ où a, b sont des nombres réels.

- b est l'ordonnée à l'origine de la droite C_g donc $\boldsymbol{b = 6}$.

- a est le coefficient directeur de la droite C_g
  Les points $A(0\,;6)$ et $B(6\,;3)$ appartiennent à C_g. Nous avons donc :

$$a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{6-3}{0-6} = \frac{3}{-6} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

D'où : $g(x) = -\frac{1}{2}x + 6$

7) Déterminons par le calcul les éventuels antécédents de 7 par la fonction g sur $\mathbb{R}$.

$$g(x) = 7 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + 6 = 7$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = 1$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = -2}$$

Nous retrouvons par le calcul que $\mathbf{-2}$ est l'antécédent de 7 par la fonction g.