LYCÉE PARC DE VILGÉNIS

Rentrée de sept. 2022

LES MATHÉMATIQUES EN PTSI

Table des matières

PARTIE I. INTRODUCTION

Ce texte contient deux parties.

La première liste les points que je vous demande de réviser pour la rentrée.

La seconde partie se propose de détailler la façon dont les cours de maths sont construits, et la façon dont il faut les travailler. Vous savez vraisemblablement déjà tout. Je vous demande simplement de la lire, nous en parlerons à la rentrée. N'hésitez pas à m'envoyer un mail si certaines choses ont besoin d'être expliquées.

PARTIE II. RÉVISIONS

1. CE QU'IL CONVIENT DE FAIRE

Pour engager l'année scolaire dans les meilleures conditions, il est important d'être au point sur le programme de Mathématiques du secondaire. Particulièrement en ce qui concerne la maitrise du **calcul**, celle-ci étant nécessaire en *Maths*, en *Physique-Chimie* et en *Sciences de l'ingénieur*.

Afin d'encadrer ce travail de révision et de préparation (que je vous conseille fortement de faire avant la rentrée), des exercices sont proposés. Ces exercices sont tirés d'un *Cahier de calcul* écrit par des collègues professeurs de Mathématiques en CPGE scientifique. Vous trouverez ce *Cahier de calcul* et son *Corrigé* dans le même répertoire que celui qui héberge ce texte.

2. POINTS DU PROGRAMME À RÉVISER

2.1. Analyse

2.1.1. *Fonctions puissance.* — Domaine de définition, courbes, dérivées des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et plus généralement des fonctions $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{Z}$.

2.1.2. *Fonctions polynomiales du premier et second degré.* — Courbes des fonctions de la forme $x \mapsto ax + b$ et $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

2.1.3. *Fonctions racines.* — Domaine de définition, courbe, dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

2.1.4. *Fonctions trigonométriques.* — Domaine de définition, courbes, dérivées et valeurs remarquables des fonctions cos et sin.

2.1.5. *Logarithme népérien.* — Domaine de définition, courbe, dérivée et valeurs remarquables de la fonction ln.

2.1.6. *Exponentielle.* — Domaine de définition, courbe, dérivée et valeurs remarquables de la fonction exp.

2.1.7. *Étude générale de fonctions.* — Étude du domaine de définition d'une fonction f. Calcul de la dérivée d'une fonction f dérivable. Formules :

$$(u+v)' = u' + v', \quad (uv)' = u'v + v'u, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \quad (e^u)' = u'e^u,$$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}, \quad (\cos(u))' = -\sin(u), \quad (\sin(u))' = \cos(u), \quad (u^n)' = nu^{n-1}$$

2.1.8. *Résolution d'équations et d'inéquations.* — En particulier, résolution des équations du premier et second degré :

$$ax + b = 0, \quad ax^2 + bx + c = 0.$$

Tableau de signe d'un produit, d'un quotient. Tableau de signe d'une fonction polynomiale du second degré.

2.2. Manipulations algébriques

Connaitre et savoir utiliser les formules :

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$,
(2) $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = a^{-n}$,
(3) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$,
(4) $(a^m)^n = a^{mn}$,
(5) $(ab)^n = a^n b^n$,
(6) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$,
(7) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$,
(8) $\ln(a^n) = n\ln(a)$,
(9) $e^{\ln(a)} = a$, $\ln(e^a) = a$.
(10) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
(11) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

3. EXERCICES DU CAHIER DE CALCUL

Voici la liste des chapitres du *Cahier de Calcul* à étudier pendant les vacances. Pour chacun d'entre eux, je donne des exercices à faire en priorité. Il serait bon de tous les aborder, mais pas forcément pour les faire tous en entier.

En cas de blocage, la première chose à faire est d'aller consulter son cours (de Terminale, de Première, ça dépend de l'exercice). Pas les corrigés d'exercices similaires vus au lycée, mais le **cours** concerné. Si cela ne suffit pas, allez consulter le *Corrigé*. Et bien sûr, vous pouvez toujours m'envoyer un mail.

La liste ci-dessous peut paraitre longue. Mais faire sérieusement ce travail de préparation vous aidera énormément. La plupart des difficultés rencontrées en CPGE sont dûes à des lacunes en calcul. À l'inverse, un élève à l'aise en calcul aura des facilités pour assimiler les nouvelles notions des programmes de sciences de PTSI.

Chapitre 1 – Fractions. — Exercices à faire en priorité : 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 1.10, 1.11, 1.12.

Chapitre 2 – Puissances. — Exercices à faire en priorité : 2.1, 2.2, 2.5.

Chapitre 3 – Calcul littéral. — Exercices à faire en priorié : 3.1, 3.2, 3.3.

Chapitre 4 – Racines carrées. — Exercices à faire en priorité : 4.1, 4.2, 4.5, 4.6.

Chapitre 7 – Exponentielle et logarithme. — Exercices à faire en priorité : 7.1, 7.2, 7.5, 7.7, 7.10.

Chapitre 9 – Dérivation. — Exercices à faire en priorité : tous.

PARTIE III. FORME GÉNÉRALE D'UN COURS DE MATHÉMATIQUES

Les textes mathématiques sont tous construits de la même façon. Leur colonne vertébrale consiste en une succession de *définitions*, de *résultats* et de *démonstrations*.

4. LES DÉFINITIONS

Une *définition* se propose de **donner un nom** à une propriété mathématique ou aux objets qui vérifient cette propriété. Elle est parfois accompagnée d'un paragraphe nommé *Notation*, et qui, lui, propose une **convention d'écriture** de certains de ces objets préalablement définis.

4.1. Quelques exemples

Voici ce que vous pourriez trouver dans un cours sur la divisibilité.

DÉFINITION 4.1. — *Soit n un entier naturel, soit d un entier naturel non nul. On dit que d* divise *n si $\frac{n}{d}$ est un entier.*

DÉFINITION 4.2. — *Soit n un entier naturel. On dit que n* est pair *si n est divisible par 2.*

Notation 4.3. — On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs.

4.2. D'autres exemples

Ceux-là pourraient se trouver dans un cours d'analyse.

DÉFINITION 4.4. — *Soit* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que* f *est* croissante *si, quelque soient* $x, y \in \mathbb{R}$ *vérifiant* $x \leq y$, *on a* $f(x) \leq f(y)$.

DÉFINITION 4.5. — *Soit* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que* f *est* strictement croissante *si, quelque soient* $x, y \in \mathbb{R}$ *vérifiant* $x < y$, *on a* $f(x) < f(y)$.

DÉFINITION 4.6. — *Soient* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $a \in \mathbb{R}$. *On dit que* f *est dérivable en* a *si*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie l *quand* x *tend vers* a. *On note alors* $f'(a)$ *ce réel* l.

---

5. RÉSULTATS, DÉMONSTRATIONS

Les *résultats* énoncent **des assertions mathématiques vraies**. Chacun vient avec une *démonstration* (ou *preuve*), un paragraphe qui explique pourquoi l'assertion est vraie. On indique parfois la fin d'une démonstration par le symbole □, ou par l'abréviation CQFD.

Il existe plusieurs noms de résultats.

– Les **théorèmes**. Ce sont les résultats de premier plan. Ils peuvent porter un nom, soit du mathématicien qui l'a découvert, soit qui évoque son contenu.
– Les **propositions**. Ce sont des résultats de moindre portée.
– Les **corollaires**. Venant après un théorème ou une proposition, ce sont des conséquences plus ou moins immédiates du résultat qui le précède.

Nous verrons d'autres appélations (comme *Propriétés*, ou *Lemme*). Les différences entre tel ou tel type de résultat ne sont pas toujours claires. Peu importe pour vous : c'est votre cours qui décide si tel résultat s'appelle théorème ou lemme, etc.

Résumons : ce que l'on appelle *résultat* en maths est un énoncé dont on sait qu'il est vrai, autrement dit dont une démonstration existe. Nous verrons une preuve de la plupart des résultats énoncés en PTSI. À quelques exceptions : certaines démonstrations difficiles et hors-programme seront omises. Cela ne signifie pas que la preuve n'existe pas (car alors, l'énoncé ne pourrait pas être appelé *Théorème* ou assimilé), seulement que nous ne la verrons pas. On dit alors que l'on *admet* le résultat.

Quelques exemples. — Commençons par un résultat simple, ce qui signifie que sa preuve est facile.

PROPOSITION 5.1. — *Soit n un entier naturel. On suppose que n est divisible par 6. Alors n est pair.*

Démonstration. — Soit n un entier naturel.
Hypothèse : n est divisible par 6.
Ainsi, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k$. Or $6 = 3 \times 2$. Donc $n = 2 \times 3 \times k = 2 \times (3k)$.
Or $3k$ est entier. Donc n est pair. □

Autre exemple :

THÉORÈME 5.2. — *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f est dérivable en a et $f'(a) > 0$. Alors f est strictement croissante.*

Démonstration. — Admise. □

Voici une des premières choses auxquelles vous devez faire attention : ne pas confondre une définition avec un résultat.

– Une *définition* donne un nom, afin que les gens puissent parler entre eux et se comprendre. Par exemple, après la définition 4.2, quelqu'un voulant dire :
« 4 est un nombre dont la division par 2 donne un nombre entier »
peut maintenant tout simplement dire :
« 4 est pair ».
C'est la même chose, mais en plus concis. Cela permet d'énoncer des choses complexes de manière simple. Encore faut-il savoir de quoi on parle : les définitions doivent être connues, tout simplement pour comprendre ce que dit le prof, le cours ou les exercices posés au concours.
Rappelons à ce propos quelque chose d'essentiel (et de rassurant) :

En maths, un énoncé n'est jamais ambigu. Si vous ne comprenez pas ce qu'un exercice demande de faire, ce n'est pas parce que ce dernier est mal posé : c'est parce que vous ne connaissez pas certaines définitions.

– Un *résultat* énonce une vérité impliquant des notions définies préalablement. En cours, il servira à démontrer de nouveaux résultats ; en interrogation, il servira à répondre à certaines questions.

Par exemple, le théorème 5.2 n'explique pas ce qu'est une fonction strictement croissante (c'est le role de la définition 4.5). Par contre, il permettra de montrer que **certaines** fonctions sont strictement croissantes.

On pourrait imaginer l'exercice suivant :

EXERCICE. — *Montrer :* $6 + \cos(3) < 8 + \cos(4)$.

Une solution serait :

SOLUTION. — *On considère la fonction* $f : x \mapsto 2x + \cos(x)$. *Alors* f *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $f'(x) = 2 - \sin(x)$. *Or, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\sin(x) \leq 1$. *Ainsi,* $f'(x) \geq 2 - 1 > 0$. *D'après le théorème 5.2,* f *est strictement croissante. Comme* $3 < 4$, *on a en particulier* $f(3) < f(4)$. *Soit encore :*

$$\boxed{6 + \cos(3) < 8 + \cos(4).}$$

6. ÉLÉMENTS DE COURS

Un cours de maths ne consiste pas uniquement en une succession de définitions, résultats et preuves. Il contient du texte, des remarques, des exemples et des exercices. Ces éléments sont tout aussi importants que les définitions, résultats et démonstrations.

Un cours de mathématiques ne contient aucun élément superflu.

Reprenons le cadre du paragraphe 4.1, en présentant ce à quoi un cours sur la divisibilité pourrait ressembler :

On présente ci-après une relation sur les nombres entiers : la relation de *divisibilité*.

DÉFINITION 6.1. — *Soit n un entier naturel, soit d un entier naturel non nul. On dit que d* divise *n si $\frac{n}{d}$ est un entier.*

Notation 6.2. — Lorsque $d \in \mathbb{N}^*$ divise n, on écrit $d|n$.

Exemple 6.3. — On a $5|15$. En effet, $\frac{15}{5} = 3$ et 3 est entier.

Voyons une caractérisation de la divisibilité.

PROPOSITION 6.4. — *Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$d|n \iff \exists k \in \mathbb{N},\ n = d \times k.$$

Démonstration. — Hypothèse : d divise n. On a :

$$n = d \times \frac{n}{d}, \tag{1}$$

Comme $d|n$, on a par définition $\frac{n}{d} \in \mathbb{N}$. Posant $k = \frac{n}{d}$, l'égalité (1) ci-dessus montre que n s'écrit $n = d \times k$ avec $k \in \mathbb{N}$.
Hypothèse : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = d \times k$. Ainsi, comme $k = \frac{n}{d}$, on a $\frac{n}{d} \in \mathbb{N}$ et donc d divise n. □

Voici un cas particulier de divisibilité :

DÉFINITION 6.5. — *Soit n un entier naturel. On dit que n* est pair *si n est divisible par 2. On dit qu'il est* impair *sinon.*

Notation 6.6. — On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs.

Ainsi, utilisant la proposition 6.4, un entier n est pair si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.

Exemple 6.7. — 0,2 et 4 sont des nombres pairs. En effet,

$$0 = 2 \times 0, \quad 2 = 2 \times 1, \quad 4 = 2 \times 2.$$

Exercice 6.8. — Montrer que 16 est pair.

Exercice 6.9. — Montrer que la somme et le produit de 2 nombres pairs sont pairs.

On dispose du résultat suivant :

PROPOSITION 6.10. — *Soit n un entier naturel. On suppose que n est divisible par 6. Alors n est pair.*

Démonstration. — Soit n un entier naturel.
Hypothèse : n est divisible par 6.
Ainsi, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k$. Or $6 = 3 \times 2$. Donc $n = 2 \times 3 \times k = 2 \times (3k)$.
Or $3k$ est aussi un entier. Donc n est pair. □

Remarque 6.11. — Bien sur, la réciproque est fausse : certains entiers sont pairs, mais ne sont pas divisibles par 6. Un contre-exemple est 4.

Exercice 6.12. — Montrer que si un nombre est divisible par 6, alors il est divisible par 3.

Exercice 6.13. — Un nombre divisible par 3 est-il nécessairement impair ?

7. COMMENT TRAVAILLE-T-ON LES MATHS ?

La réponse commence par : **il faut travailler le cours**. Beaucoup d'entre vous n'ont jamais vraiment travailler le cours. Ils se sont contentés d'aller revoir les corrigés des exercices faits en TD ou à la maison. Il faudra absolument perdre cette habitude.

Comment travaille-t-on le cours ? On le lit entièrement, comme un livre, en partant du début, en ne sautant aucun paragraphe, en s'arrêtant à chaque affirmation non comprise jusqu'à ce qu'elle devienne claire. Si on ne comprend toujours pas, on pose la question au prof de maths par mail, ou au début du cours suivant.

L'objectif à atteindre est le suivant : connaître les définitions et résultats par cœur ; comprendre les preuves, savoir les refaire si elles sont faciles, en connaître les grandes lignes sinon. Avoir les exemples et exercices de cours en tête, et savoir les refaire sans regarder la solution donnée en classe. Ces derniers sont du ressort de l'application directe du cours. Ne pas savoir les refaire dès le début n'est pas grave ; cela indique simplement que le cours n'a pas été suffisamment assimilé. Et c'est normal : ces objectifs ne peuvent pas être atteints au bout d'une unique lecture. Il faut **retravailler**, **relire** le cours autant de fois que nécessaire.

D'autres moyens d'assimiler les notions au programme se présenteront : les travaux dirigés et les devoirs maison. Mais se plonger dedans trop tôt est contre-productif : ces exercices ne peuvent être efficaces que si le cours a été suffisamment travaillé. Cette façon de procéder peut paraître chronophage. C'est en fait la façon la plus rapide, et certainement la seule à être efficace.

Excellente nouvelle : une bonne assimilation du cours, au sens décrit ci-avant, permet seule des notes très honorables au concours. Et bien sûr, elle permet d'aller alors plus loin pour viser les meilleurs résultats.

Une nouvelle encore meilleure : une bonne assimilation du cours ne requiert aucun talent, seulement du travail.

Lycée Parc de Vilgénis
Massy
E-mail : jf.planchat@gmail.com