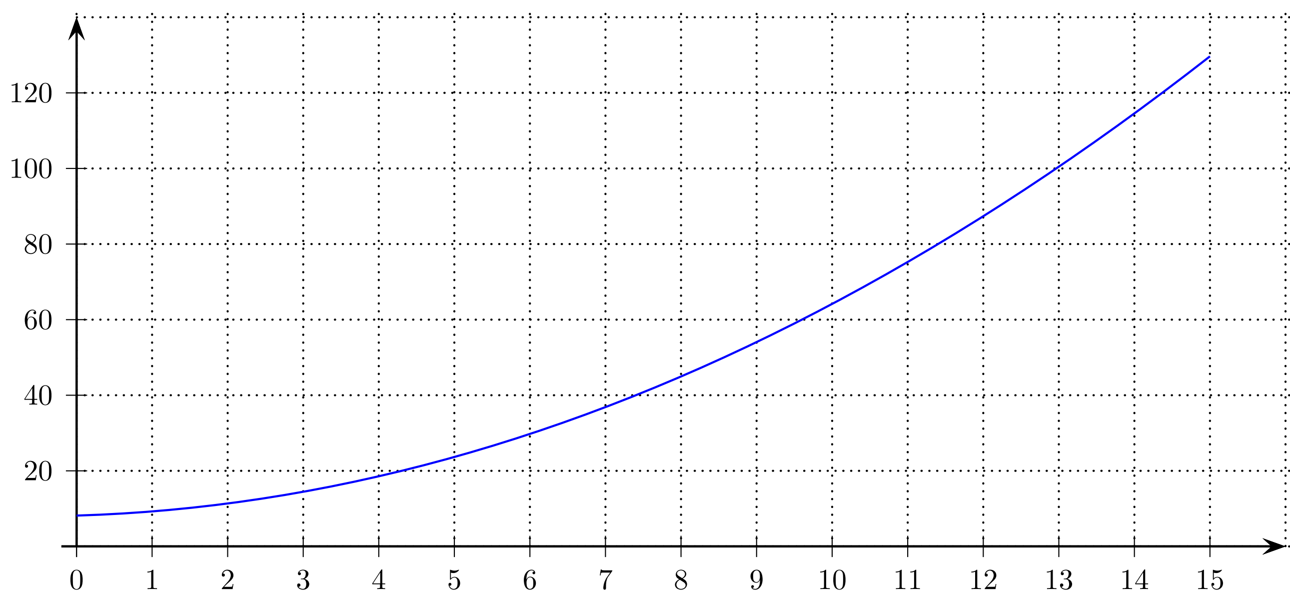
1G / TG — Fiche de révisions — Été 2023

Exercice 1

Une entreprise fabrique un produit « Bêta ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles. Le coût total, exprimé en milliers d'euros, de fabrication de x milliers d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $]0; 15]$ par :

$$C(x) = 0,5x^2 + 0,6x + 8,16$$

On admet que chaque article fabriqué est vendu au prix unitaire de 8 euros.
On désigne par $R(x)$ le montant en milliers d'euros de la recette mensuelle obtenue pour la vente de x milliers d'articles du produit « Bêta ». On a donc $R(x) = 8x$.
On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la fonction coût total.



1. Tracer dans le repère ci-dessus la courbe représentative de la fonction recette.

2. Par lecture graphique déterminer l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.

3. On désigne par $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles. C'est la différence entre le cout et la recette.

- **a.** Montrer que le bénéfice exprimé en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles, est donné par $B(x) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16$ pour tout $x \in]0; 15]$.

- **b.** Étudier le signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).

- **c.** Étudier les variations de la fonction B sur $]0; 15]$.
En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euros, de ce bénéfice maximal ?

Exercice 2

Jardinier amateur, Didier possède une superbe pelouse de gazon d'une superficie de 2000 m^2. Chaque année 20% du gazon est détruit pendant l'été et remplacé par de mauvaises herbes. Tous les ans, à l'automne, Didier arrache 50 m^2 de mauvaises herbes et le remplace par du gazon.
Les aires seront exprimées en mètres carrés, arrondies à l'unité au besoin.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la surface de gazon sans mauvaises herbes restant au bout de n automnes.
On a donc $u_0 = 2000$.

1. Calculer la surface de la pelouse après le premier automne.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$.

3. Didier refera entièrement sa pelouse lorsque la surface de gazon sans mauvaises herbes sera inférieure à 275 m^2.
On considère la fonction python ci-dessous :

```
def seuil():
        u=.........
        n=0
        while ......... :
                n=n+1
                u=.........
        return n
```

a. Recopier et compléter cette fonction pour qu'elle renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leq 275$.

b. Que renvoie cette fonction ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 250$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,8$.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1750 \times 0,8^n + 250$.

5. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

6. Didier se demande dans combien d'années l'aire de la pelouse sera inférieure à 200 m^2.

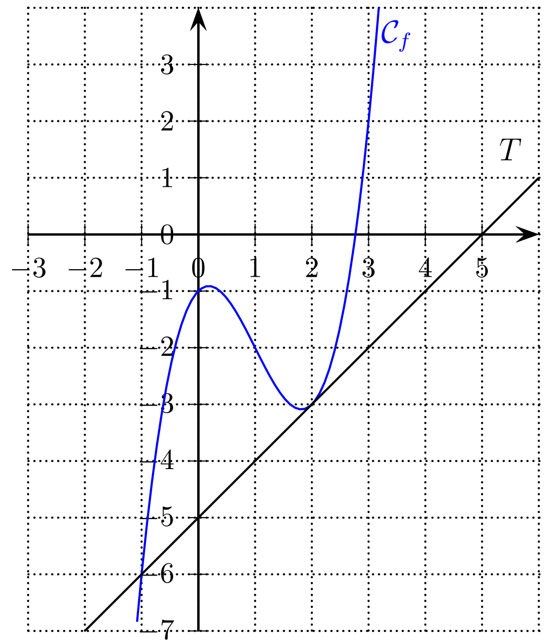
Que peut-on lui répondre ?

Exercice 3

Partie A. Par lecture graphique

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

On a représenté ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sa courbe représentative, et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.



1. Lire graphiquement $f'(2)$.

2. Déterminer l'équation réduite de T.

3. Conjecturer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

Partie B. Par le calcul

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

2. Retrouver l'équation de la tangente T.

3. Vérifier que, pour tout réel x, $x^3 - 3x^2 + x - 1 - (x - 5) = (x + 1)(x - 2)^2$.

4. En déduire les coordonnées des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et T.

5. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

Exercice 4

Déterminer le tableau de variation complet de la fonction $f(x) = x^2 - 8x + 3$ pour $x \in [-10; 10]$.

Exercice 5

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{3}{x^2 + 2x + 2}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{-6x - 6}{(x^2 + 2x + 2)^2}$.

2. Étudier les signes de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$

3. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Un sportif a pris un produit dopant. La quantité, en mg/L de ce produit dopant présente dans le sang de ce sportif t heures après la prise est modélisée par une fonction f.
Pour tout $t \in [0; +\infty[$, on a : $f(t) = 3t\mathrm{e}^{-0,4t}$.

1. Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Montrer que, pour tout $t \in [0; +\infty[$, $f'(t) = (-1,2t + 3)\mathrm{e}^{-0,4t}$.

3. Étudier les signes de $f'(t)$.

4. En déduire le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.

5. Au bout de combien d'heures la quantité de produit dopant dans le sang du sportif sera-elle maximale ? Quelle sera cette quantité maximale ?

Exercice 7

150 élèves d'un établissement sont inscrits aux activités du midi : 30 sont inscrits en musique, 45 sont inscrits en sport et 75 sont inscrits en cinéma.
Chaque élève pratique une et une seule activité.
Parmi les élèves inscrits en musique, 30% sont des filles.
Parmi les élèves inscrits en sport, 60% sont des filles.
Parmi les élèves inscrits en cinéma, 72% sont des filles.

On choisit au hasard un élève inscrit aux activités du midi. On note :
- F l'événement : « l'élève choisi est une fille »
- M l'événement : « l'élève choisi est inscrit en musique »
- S l'événement : « l'élève choisi est inscrit en sport »
- C l'événement : « l'élève choisi est inscrit en cinéma »

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité pondéré.

2. Calculer la probabilité que l'élève choisi soit une fille inscrite en musique.

3. Montrer que la probabilité que l'élève choisi soit une fille est égale à $0,6$.

4. Les évènements M et F sont-ils indépendants ?

5. Sachant que l'élève choisi est un garçon, calculer la probabilité qu'il soit inscrit en cinéma.

Exercice 8

Eugénie, meilleure buteuse française au football, effectue une série de trois tirs au but.

On dispose des informations suivantes :
- Eugénie a 18,9% de chance de marquer exactement 1 but
- Eugénie a 44,1% de chance de marquer exactement 2 buts
- Eugénie a 34,3% de chance de marquer exactement 3 buts.

On propose à une spectatrice le jeu suivant : elle mise 15 euros avant la série de tirs au but d'Eugénie. Chaque but marqué par Eugénie lui rapporte 8 euros, et chaque but manqué par Eugénie ne lui rapporte rien.

On note G la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique de la spectatrice, c'est à-dire la différence entre le gain total obtenu et la mise engagée.

1. Justifier que les valeurs prises par G sont -15, -7, 1 et 9.

2. Déterminer, dans un tableau, la loi de probabilité de G.

3. Calculer $\mathrm{P}(G \geq 0)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. **a.** Calculer $\mathrm{E}(G)$, l'espérance de G.

b. La spectatrice a-t-elle intérêt à jouer au jeu ?

c. On considère la fonction python `jeu` de paramètres deux listes `L` et `G` suivante :

```python
def jeu(L,G):
        n=len(L)
        E=0
        for i in range(n):
                E=E+L[i]*G[i]
        return E
```

Que doit-on taper dans la console pour retrouver la réponse à la question **4. a.** ?