I Calculs avec des fractions, des puissances et des racines carrées

Exercice 1

Mettre les expressions suivantes sous forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{3}{8} - \frac{7}{5} = \frac{3\times 5}{8\times 5} - \frac{7\times 8}{5\times 8} = \frac{15-56}{40} = -\frac{41}{40}$$

$$B = 49 \times \frac{5}{21} = \frac{49\times 5}{21} = \frac{7\times 7\times 5}{3\times 7} = \frac{35}{3}$$

$$C = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} - \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + 3\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right) = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + 3\left(\frac{24}{30} - \frac{25}{30}\right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + 3\times\left(-\frac{1}{30}\right) = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{1}{10} = \frac{40}{60} - \frac{45}{60} - \frac{6}{60} = -\frac{11}{60} \end{aligned}$$

$$E = \frac{3-\frac{4}{9}}{\frac{3}{7}-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{27}{9}-\frac{4}{9}}{\frac{12}{28}-\frac{7}{28}} = \frac{\frac{23}{9}}{\frac{5}{28}} = \frac{23}{9}\times\frac{28}{5} = \frac{23\times 28}{9\times 5} = \frac{644}{45}$$

$$F = \frac{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}{\frac{7}{2}} = \frac{\frac{4}{6}+\frac{5}{6}}{\frac{7}{2}} = \frac{\frac{9}{6}}{\frac{7}{2}} = \frac{9}{6}\times\frac{2}{7} = \frac{3\times 3\times 2}{3\times 2\times 7} = \frac{3}{7}$$

$$G = \frac{\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)\times 3}{2} = \frac{\left(\frac{9}{12}-\frac{10}{12}\right)\times 3}{2} = \frac{-\frac{1}{12}\times 3}{2} = \frac{-\frac{1}{4}}{2} = -\frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} H &= 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}} = 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{\frac{6}{3}+\frac{1}{3}}} = 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{\frac{7}{3}}} = 2 + \frac{1}{3+\frac{3}{7}} = 2 + \frac{1}{\frac{21}{7}+\frac{3}{7}} = 2 + \frac{1}{\frac{24}{7}} \\ &= 2 + \frac{7}{24} = \frac{48}{24} + \frac{7}{24} = \frac{55}{24} \end{aligned}$$

Exercice 2

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$A = 7^8 \times 7^{-5} = 7^{8-5} = 7^3$$

$$B = 5^6 \times 3^6 = (5\times 3)^6 = 15^6$$

$$C = \frac{(21^{-5})^2}{7^{-10}} = \frac{21^{-5\times 2}}{7^{-10}} = \frac{21^{-10}}{7^{-10}} = \left(\frac{21}{7}\right)^{-10} = 3^{-10}$$

$$D = \frac{5^{-2-7}}{5^6} = \frac{5^{-9}}{5^6} = 5^{-9-6} = 5^{-15}$$

$$E = \frac{(-1)^4}{(-3)^5} = \frac{1}{(-3)^5} = \frac{1}{-3^5} = -3^{-5}$$

$$F = \frac{16^{25}}{2^{100}} = \frac{(2^4)^{25}}{2^{100}} = \frac{2^{4\times 25}}{2^{100}} = \frac{2^{100}}{2^{100}} = 1$$

Pour a et b deux réels tels que $b^2 + ab \neq 0$,

$$G = \frac{a^2+ab}{b^2+ab} = \frac{a(a+b)}{b(b+a)} = \frac{a}{b}$$

Pour a et b deux réels tels que $a \neq 0$ et $b \neq 0$,

$$\begin{aligned} H &= \frac{a^2(-a)^3(-b^2)b^5a}{(-b)^4a^5(ab)^2} = \frac{a^2\times(-a^3)\times(-b^2)\times b^5\times a}{b^4\times a^5\times a^2\times b^2} = \frac{a^{2+3+1}\times b^{2+5}}{b^{4+2}\times a^{5+2}} \\ &= \frac{a^6\times b^7}{b^6\times a^7} = \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Exercice 3 (non obligatoire)

1. Écrire $A = \sqrt{8}\times\sqrt{2}$ et $B = \dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$ sous la forme d'un entier.

$$A = \sqrt{8}\times\sqrt{2} = \sqrt{8\times 2} = \sqrt{16} = 4$$

$$B = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{98}{2}} = \sqrt{49} = 7$$

2. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ les expressions suivantes :

$$A = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = \sqrt{9}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$B=\sqrt{200}=\sqrt{100\times 2}=\sqrt{100}\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

$C=3\sqrt{2}-4\sqrt{8}+2\sqrt{18}=3\sqrt{2}-4\sqrt{4}\sqrt{2}+2\sqrt{9}\sqrt{2}=3\sqrt{2}-4\times 2\sqrt{2}+2\times 3\sqrt{2}$
$=3\sqrt{2}-8\sqrt{2}+6\sqrt{2}=\sqrt{2}$

$D=\sqrt{4}\sqrt{3}+3\sqrt{3}-\sqrt{25}\sqrt{3}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-5\sqrt{3}=0$

$E=\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}}\times\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{25}}=\dfrac{9}{\sqrt{121}\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{49}\sqrt{2}}{5}=\dfrac{9}{11\sqrt{2}}\times\dfrac{7\sqrt{2}}{5}=\dfrac{9\times 7\sqrt{2}}{11\sqrt{2}\times 5}=\dfrac{63}{55}$

3. Écrire sans racine carrée au dénominateur les expressions suivantes :

$A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$B=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$C=\dfrac{3}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{3(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\dfrac{3\sqrt{5}-3}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\dfrac{3\sqrt{5}-3}{5-1}=\dfrac{3\sqrt{5}-3}{4}$

$D=\dfrac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{(1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\dfrac{3+\sqrt{5}+3\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{3^2-\sqrt{5}^2}=\dfrac{3+4\sqrt{5}+5}{9-5}$
$=\dfrac{8+4\sqrt{5}}{4}=\dfrac{4(2+\sqrt{5})}{4}=2+\sqrt{5}$

4. Montrer que $\sqrt{2}=1+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{1+\sqrt{2}} &= \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{(2+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}\\ &= \frac{2-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-2}{1-2}=\frac{-\sqrt{2}}{-1}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

5. Le nombre $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé le nombre d'or. Montrer que $\varphi^2-\varphi-1=0$

$$\begin{aligned}\varphi^2-\varphi-1 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1\\ &= \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}-\frac{2(1+\sqrt{5})}{4}-\frac{4}{4}\\ &= \frac{(1+\sqrt{5})^2-2(1+\sqrt{5})-4}{4}\\ &= \frac{1+2\sqrt{5}+\sqrt{5}^2-2-2\sqrt{5}-4}{4}\\ &= \frac{1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5}-4}{4}=\frac{0}{4}=0\end{aligned}$$

6. Calculer $\left(\sqrt{12-3\sqrt{7}}+\sqrt{12+3\sqrt{7}}\right)^2$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{12-3\sqrt{7}}+\sqrt{12+3\sqrt{7}}\right)^2 &= \sqrt{12-3\sqrt{7}}^2+2\sqrt{12-3\sqrt{7}}\sqrt{12+3\sqrt{7}}+\sqrt{12+3\sqrt{7}}^2\\ &= 12-3\sqrt{7}+2\sqrt{(12-3\sqrt{7})(12+3\sqrt{7})}+12+3\sqrt{7}\\ &= 24+2\sqrt{12^2-(3\sqrt{7})^2}=24+2\sqrt{144-3^2\sqrt{7}^2}\\ &= 24+2\sqrt{144-9\times 7}=24+2\sqrt{81}=24+2\times 9=42\end{aligned}$$

II Calcul littéral

Exercice 1

Soit $x\in\mathbb{R}$. Développer et réduire les expressions suivantes :

Soit $x\in\mathbb{R}$,

$A=(3x-5)(3x+2)=9x^2+6x-15x-10=9x^2-9x-10$

$B = \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{7}\right)\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}x\right) = \frac{1}{2}x - \frac{9}{20}x^2 - \frac{2}{21} + \frac{3}{35}x = -\frac{9}{20}x^2 + \left(\frac{35}{70} + \frac{6}{70}\right)x - \frac{2}{21}$
$= -\frac{9}{20}x^2 + \frac{41}{70}x - \frac{2}{21}$

$C = (x + 2\sqrt{5})(x - 5\sqrt{3}) = x^2 - 5\sqrt{3}x + 2\sqrt{5}x - 2\sqrt{5} \times 5\sqrt{3}$
$= x^2 + (2\sqrt{5} - 5\sqrt{3})x - 10\sqrt{15}$

$D = 9 - 5(3x - 4) = 9 - 15x + 20 = -15x + 29$

$E = \frac{3}{5}(x-5) - x(4-3x) = \frac{3}{5}x - 3 - 4x + 3x^2 = 3x^2 + \left(\frac{3}{5} - \frac{20}{5}\right)x - 3 = 3x^2 - \frac{17}{5}x - 3$

$F = (8x+4)(3x-10) - (x+2)(x-5) = 24x^2 - 80x + 12x - 40 - (x^2 - 5x + 2x - 10)$
$= 24x^2 - 68x - 40 - (x^2 - 3x - 10) = 24x^2 - 68x - 40 - x^2 + 3x + 10 = 23x^2 - 65x - 30$

Exercice 2 (non obligatoire)

Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant des identités remarquables, développer et réduire les expressions suivantes :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$A = (x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$

$B = (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

$C = (x - 8)(x + 8) = x^2 - 64$

$D = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$

$E = (2x + 7)^2 - (3 - 4x)^2 = 4x^2 + 28x + 49 - (9 - 24x + 16x^2)$
$= 4x^2 + 28x + 49 - 9 + 24x - 16x^2 = -12x^2 + 52x + 40$

$F = (2x + 1)^2(2x - 1) = (4x^2 + 4x + 1)(2x - 1) = 8x^3 - 4x^2 + 8x^2 - 4x + 2x - 1$
$= 8x^3 + 4x^2 - 2x - 1$

$G = (2x - 9)(3 - 2x) + 5(2x + 1)^2 = 6x - 4x^2 - 27 + 18x + 5(4x^2 + 4x + 1)$
$= -4x^2 + 24x - 27 + 20x^2 + 20x + 5 = 16x^2 + 44x - 22$

$H = (x + 1)^2 + \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = x^2 + 2x + 1 + x^2 - \frac{1}{9} = 2x^2 + 2x + \frac{8}{9}$

Exercice 3

Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire sous la forme d'une seule fraction les expressions suivantes :

- Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -2$,
$A = 4 + \frac{3}{x+2} = \frac{4(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2} = \frac{4x+8+3}{x+2} = \frac{4x+11}{x+2}$
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{1}{3}$,
$B = \frac{2x}{3x-1} - 5 = \frac{2x}{3x-1} - \frac{5(3x-1)}{3x-1} = \frac{2x - 15x + 5}{3x-1} = \frac{-13x+5}{3x-1}$
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -3$ et $x \neq 5$,
$C = \frac{4}{2x+6} - \frac{3}{x-5} = \frac{2}{x+3} - \frac{3}{x-5} = \frac{2(x-5)}{(x+3)(x-5)} - \frac{3(x+3)}{(x+3)(x-5)}$
$= \frac{2x - 10 - (3x+9)}{(x+3)(x-5)} = \frac{2x - 10 - 3x - 9}{(x+3)(x-5)} = \frac{-x-19}{(x+3)(x-5)}$

Exercice 4 (non obligatoire)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser au maximum les expressions suivantes :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$A = 12x^3 - 3x = 3x(4x^2 - 1) = 3x(2x - 1)(2x + 1)$

$B = 27x^3 - 36x^2 + 12x = 3x(9x^2 - 12x + 4) = 3x(3x - 2)^2$

$$C = (x+1)(4x+3) - (x+1)(7x-8) = (x+1)(4x+3-(7x-8))$$
$$= (x+1)(4x+3-7x+8) = (x+1)(-3x+11)$$

$$D = (3x-1)(4x+7)+(x-12)(3x-1) = (3x-1)(4x+7+x-12) = (3x-1)(5x-5)$$
$$= (3x-1)\times 5(x-1) = 5(3x-1)(x-1)$$

$$E = (3x+8)(x-1) - 1 + x = (3x+8)(x-1) + (x-1) = (x-1)(3x+8+1)$$
$$= (x-1)(3x+9) = (x-1)\times 3(x+3) = 3(x-1)(x+3)$$

$$F = (2x+1)(2x-6) + (x-2)(x-3) = (2x+1)\times 2(x-3) + (x-2)(x-3)$$
$$= (x-3)(2(2x+1)+x-2) = (x-3)(4x+2+x-2) = (x-3)\times 5x = 5x(x-3)$$

Exercice 5 (non obligatoire)

Soit $x \in \mathbb{R}$. A l'aide d'une identité remarquable, factoriser au maximum les expressions suivantes :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$A = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$B = 81x^2 - 4 = (9x-2)(9x+2)$$

$$C = 16 - (8x-6)^2 = (4-(8x-6))(4+(8x-6)) = (4-8x+6)(4+8x-6)$$
$$= (-8x+10)(8x-2)$$

$$D = 4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$$

$$E = x^2 - 4 - (x+2)^2 = (x-2)(x+2) - (x+2)^2 = (x+2)(x-2-(x+2))$$
$$= (x+2)(x-2-x-2) = (x+2)\times(-4) = -4(x+2)$$

$$F = (2x+3)^2 - (7x-5)^2 = (2x+3-(7x-5))(2x+3+7x-5) = (2x+3-7x+5)(9x-2)$$
$$= (-5x+8)(9x-2)$$

Exercice 6

Soit n un entier naturel. Factoriser au maximum les expressions suivantes :

Soit n un entier naturel,

$$A = 3\times 5^{n+1} - 2\times 5^n = 3\times 5^n \times 5 - 2\times 5^n = 5^n(3\times 5 - 2) = 5^n \times 13 = 13\times 5^n$$

$$B = 3\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n = 3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n\times\frac{2}{5} - 3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n = 3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n\left(\frac{2}{5}-1\right)$$
$$= 3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n\times\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{9}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$C = -2\times 3^{n+1} + 2\times 3^n = -2\times 3^n\times 3 + 2\times 3^n = 2\times 3^n(-3+1)$$
$$= 2\times 3^n\times(-2) = -4\times 3^n$$

$$D = (n+1)\times 2^{n+1} - n\times 2^n = (n+1)\times 2^n\times 2 - n\times 2^n = 2^n(2(n+1)-n)$$
$$= 2^n(2n+2-n) = 2^n(n+2)$$

III Résolution d'équations et d'inéquations

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

• $3x - 5 = 0 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$.
La solution est $\frac{5}{3}$.

• $7x - 3 = 2x + 6 \Leftrightarrow 7x - 2x = 6 + 3 \Leftrightarrow 5x = 9 \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{5}$
La solution est $\frac{9}{5}$.

• $-x = 5 \Leftrightarrow x = -5$.
La solution est -5.

- $2x - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}x + 2 \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{4}x = 2 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{8}{4} - \frac{1}{4}\right)x = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{7}{4}x = \frac{7}{3}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \times \frac{4}{7} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

La solution est $\frac{4}{3}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

- $$\begin{aligned}(x-4)(2x-6) = 0 &\Leftrightarrow x - 4 = 0 \text{ ou } 2x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } 2x = 6 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = \frac{6}{2} = 3\end{aligned}$$

Les solutions sont 4 et 3.

- $$\begin{aligned}-x(x+16)(2-5x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x + 16 = 0 \text{ ou } 2 - 5x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -16 \text{ ou } -5x = -2 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -16 \text{ ou } x = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Les solutions sont 0, -16 et $\frac{2}{5}$.

- $$\begin{aligned}(5x-1)(x-9) - (x-9)(2x-1) = 0 &\Leftrightarrow (x-9)(5x-1-2x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-9) \times 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 9 = 0 \text{ ou } x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 9 \text{ ou } x = 0\end{aligned}$$

Les solutions sont 0 et 9.

- $$\begin{aligned}(2x-1)(5x-7)^2 = 0 &\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \text{ ou } (5x-7)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \text{ ou } 5x - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{7}{5}\end{aligned}$$

Les solutions sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{7}{5}$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -12$

Un carré réel est toujours positif ou nul, et $-12 < 0$ donc l'équation n'admet aucune solution réelle.

- $4x^2 + 10 = 20 \Leftrightarrow 4x^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

Les solutions sont $\sqrt{\frac{5}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{5}{2}}$.

- $$\begin{aligned}(x-4)^2 = 25 &\Leftrightarrow x - 4 = \sqrt{25} = 5 \text{ ou } x - 4 = -\sqrt{25} = -5 \\ &\Leftrightarrow x = 5 + 4 = 9 \text{ ou } x = -5 + 4 = -1\end{aligned}$$

Les solutions sont 9 et -1.

- $$\begin{aligned}(3x-5)^2 = 8 &\Leftrightarrow 3x - 5 = \sqrt{8} \text{ ou } 3x - 5 = -\sqrt{8} \\ &\Leftrightarrow 3x = \sqrt{8} + 5 \text{ ou } 3x = -\sqrt{8} + 5 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{8}+5}{3} = \frac{2\sqrt{2}+5}{3} \text{ ou } x = \frac{-\sqrt{8}+5}{3} = \frac{-2\sqrt{2}+5}{3}\end{aligned}$$

Les solutions sont $\frac{2\sqrt{2}+5}{3}$ et $\frac{-2\sqrt{2}+5}{3}$.

Exercice 2 (non obligatoire)

1. Résoudre dans $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ l'équation suivante : $\frac{5-8x}{x-2} = 3$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$,

$\frac{5-8x}{x-2} = 3 \Leftrightarrow 5 - 8x = 3(x-2) \Leftrightarrow 5 - 8x = 3x - 6$

$$\Leftrightarrow -8x - 3x = -6 - 5 \Leftrightarrow -11x = -11 \Leftrightarrow x = \frac{-11}{-11} = 1 \neq 2$$

La solution est 1.

2. Résoudre dans $]-\infty;\frac{8}{5}[\cup]\frac{8}{5};+\infty[$ l'équation suivante : $\dfrac{-3x-1}{8-5x}=0$

Soit $x\in\mathbb{R}$, $x\neq\dfrac{8}{5}$,

$\dfrac{-3x-1}{8-5x}=0 \Leftrightarrow -3x-1=0 \Leftrightarrow -3x=1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}\neq\dfrac{8}{5}$

La solution est $-\frac{1}{3}$.

3. Résoudre dans $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ l'équation suivante : $x+1=\dfrac{9}{x+1}$

Soit $x\in\mathbb{R}$, $x\neq-1$,

$$\begin{aligned} x+1=\frac{9}{x+1} &\Leftrightarrow (x+1)^2=9\\ &\Leftrightarrow x+1=3 \text{ ou } x+1=-3\\ &\Leftrightarrow x=3-1=2\neq-1 \text{ ou } x=-3-1=-4\neq-1 \end{aligned}$$

Les solutions sont 2 et -4.

4. Résoudre dans $]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$ l'équation suivante : $5+\dfrac{2}{x+3}=0$

Soit $x\in\mathbb{R}$, $x\neq-3$,

$$\begin{aligned} 5+\frac{2}{x+3}=0 &\Leftrightarrow \frac{5(x+3)+2}{x+3}=0\\ &\Leftrightarrow 5(x+3)+2=0\\ &\Leftrightarrow 5x+15+2=0\\ &\Leftrightarrow 5x=-17\\ &\Leftrightarrow x=-\frac{17}{5}x\neq-3 \end{aligned}$$

La solution est $-\frac{17}{5}$.

Exercice 3

Dresser le tableau de signe des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

• $4x-8=0 \Leftrightarrow 4x=8 \Leftrightarrow x=\dfrac{8}{4}=2$ et $4>0$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $4x-8$		$-$	0	$+$	

• $-9x+6=0 \Leftrightarrow -9x=-6 \Leftrightarrow x=\dfrac{-6}{-9}=\dfrac{2}{3}$ et $-9<0$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $-9x+6$		$+$	0	$-$	

• $2x+2=0 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{2}=-1$ et $2>0$

$7x-14=0 \Leftrightarrow 7x=14 \Leftrightarrow x=\dfrac{14}{7}=2$ et $7>0$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Signe de $2x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $7x-14$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $1 > 0$

$-2x + 3 = 0 \Leftrightarrow -2x = -3 \Leftrightarrow x - \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$ et $-2 < 0$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-2x + 3$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $k(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

• $5x - 8 = 0 \Leftrightarrow 5x = 8 \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{5}$ et $5 > 0$

$2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ et $2 > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{8}{5}$		$+\infty$
Signe de $5x - 8$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $2x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{5x-8}{2x+1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

• $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ et $3 > 0$

$-4x + 2 = 0 \Leftrightarrow -4x = -2 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$ et $-4 < 0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $3x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-4x + 2$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\frac{3x-1}{-4x+2}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

• $2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{5}{2} \quad (2 > 0)$

$S = \left[\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$

• $5x - 3 \leq 2x + 6 \Leftrightarrow 5x - 2x \leq 6 + 3 \Leftrightarrow 3x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{9}{3} = 3 \quad (3 > 0)$

$S =]-\infty; 3]$

• $-3x + 15 \geq x + 20 \Leftrightarrow -3x - x \geq 20 - 15 \Leftrightarrow -4x \geq 5 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{5}{4} \quad (-4 < 0)$

$S = \left]-\infty; -\dfrac{5}{4}\right]$

• $2x + 3 > 9x - 2 \Leftrightarrow 2x - 9x > -2 - 3 \Leftrightarrow -7x > -5 \Leftrightarrow x < \dfrac{-5}{-7} = \dfrac{5}{7} \quad (-7 < 0)$

$S = \left]-\infty; \dfrac{5}{7}\right[$

• $2,5x-3\geq 9,5x+18 \Leftrightarrow 2,5x-9,5x\geq 18+3 \Leftrightarrow -7x\geq 21 \Leftrightarrow x\leq -\dfrac{21}{7}=-3$ $(-7<0)$

$S=]-\infty;-3]$

• $-7\leq 4x+9 \Leftrightarrow -7-9\leq 4x \Leftrightarrow -16\leq 4x \Leftrightarrow -4=\dfrac{-16}{4}\leq x \quad (4>0)$

$S=[-4;+\infty[$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

Pour résoudre une inéquation « produit », on dresse un tableau de signe.

• $x-8=0 \Leftrightarrow x=8$ et $1>0$

$-1-10x=0 \Leftrightarrow -10x=1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{10}$ et $-10<0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{10}$		8		$+\infty$
Signe de $x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $-1-10x$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S=\left]-\infty;-\dfrac{1}{10}\right[\bigcup\left]8;+\infty\right[$

• $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ et $1>0$

$9x+27=0 \Leftrightarrow 9x=-27 \Leftrightarrow x=\dfrac{-27}{9}=-3$ et $9>0$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $9x+27$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$

• $-7x=0 \Leftrightarrow x=0$ et $-7<0$

$x+9=0 \Leftrightarrow x=-9$ et $1>0$

$2-x=0 \Leftrightarrow x=2$ et $-1<0$

x	$-\infty$		-9		0		2		$+\infty$
Signe de $-7x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $x+9$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $2-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Signes du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-\infty;-9]\cup[0;2]$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

Pour résoudre une inéquation « quotient », on dresse un tableau de signe.

• $3x+9=0 \Leftrightarrow 3x=-9 \Leftrightarrow x=-3$ et $3>0$
$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ et $1>0$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
Signe de $3x+9$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe du quotient		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

$S=]-3;2[$

• $-2x+3=0 \Leftrightarrow -2x=-3 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ et $-2<0$
$x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$ et $1>0$

x	$-\infty$		-4		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $-2x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du quotient		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

$S=\left]-4;\dfrac{3}{2}\right]$

• $-6x-7=0 \Leftrightarrow -6x=7 \Leftrightarrow x=-\dfrac{7}{6}$ et $-6<0$
$1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$ et $1>0$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{6}$		-1		$+\infty$
Signe de $-6x-7$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $1+x$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe du quotient		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

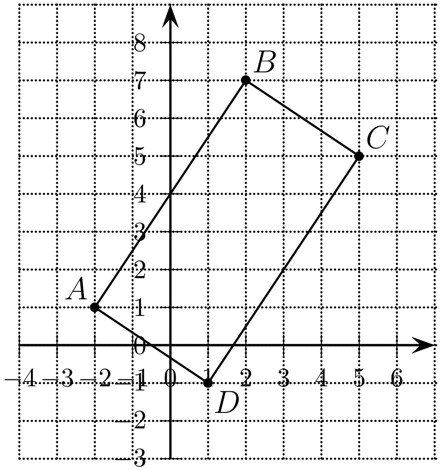
$S=\left]-\infty;\dfrac{7}{6}\right[\bigcup\left]-1;+\infty\right[$

IV Géométrie

Exercice 1 (non obligatoire)

Soit $A(-2;1)$, $B(2;7)$, $C(5;5)$ et $D(1;-1)$ des points d'un repère orthonormé.

1. Faire une figure.



2. Soit M le milieu de $[AC]$ et N le milieu de $[BD]$.

Calculer les coordonnées de points M et N.

M est le milieu de $[AC]$ donc :
$x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-2+5}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{1+5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

N est le milieu de $[BD]$ donc :
$x_N = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $y_N = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{7+(-1)}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

3. Que peut-on en déduire sur le quadrilatère $ABCD$?

Les points M et N sont confondus.
Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu.
Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

4. Calculer les longueurs AC et BD.

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(5-(-2))^2 + (5-1)^2}$
$= \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$

$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (-1-7)^2}$
$= \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2} = \sqrt{65}$

5. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur. C'est donc un rectangle.

6. Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

Puisque $ABCD$ est un rectangle, son aire vaut $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \times AD$

$AB = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$
$AD = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$
Donc $\mathcal{A}_{ABCD} = \sqrt{52}\sqrt{13} = \sqrt{52 \times 13} = \sqrt{676} = 26 \;\; u.a.$

Exercice 2 (non obligatoire)

Pour chacune des quatre questions suivantes, cocher la ou les bonnes réponses.

1. $ABCD$ est un parallélogramme. Donc :

- □ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- ■ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- ■ $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

2. On considère $ABCD$ et $BCEF$ deux parallélogramme. Donc :

- □ $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BF}$
- □ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$
- ■ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FE}$

3. Un vecteur et son opposé ont :

- ■ même direction
- □ même sens
- ■ même norme

4. Soit A, B, C et D quatre points tels que $\overrightarrow{DC} = -3\,\overrightarrow{AB}$

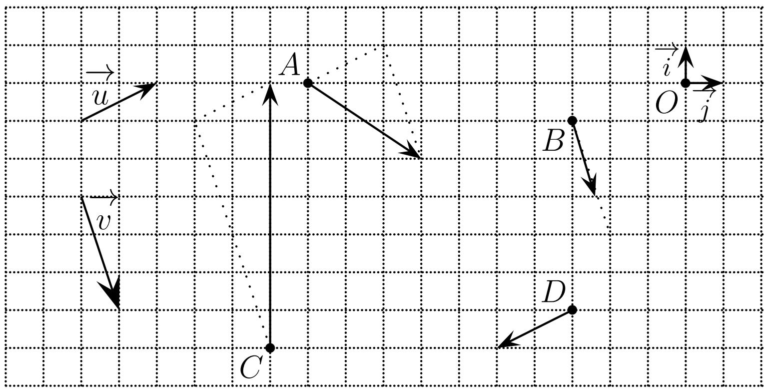
- ■ $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même direction
- ■ (DC) et (AB) sont parallèles
- □ $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même norme

Exercice 3 (non obligatoire)

1. Lire graphiquement les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$\vec{u}$ a pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

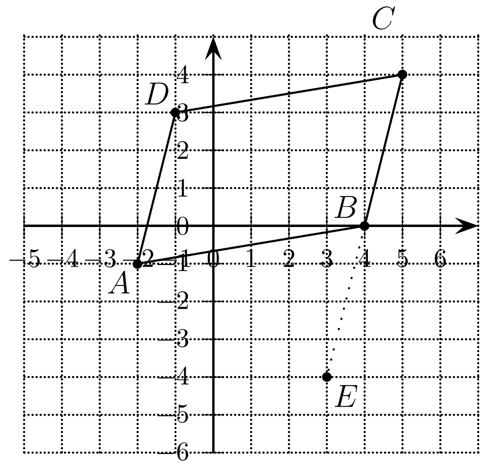
2.



Exercice 4 (non obligatoire)

Soit $A(-2;-1)$, $B(4;0)$, $C(5;4)$ et $D(-1;3)$ quatre points d'un repère.

1. Faire une figure.



2. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-(-2)\\0-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_C - x_D\\ y_C - y_D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-(-1)\\4-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

3. **a.** Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

b. Déterminer par le calcul les coordonnées du point E.

$\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_E - x_A\\ y_E - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_E-(-2)\\y_E-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_E+2\\y_E+1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B - x_C\\ y_B - y_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-5\\0-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ donc $\begin{pmatrix}x_E+2\\y_E+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$

On en déduit :
$x_E + 2 = 5 \Leftrightarrow x_E = 3$
$y_E + 1 = -3 \Leftrightarrow y_E = -4$
Donc E a pour coordonnées $E(3; -4)$

c. Les points C, B et E sont-ils alignés ?

$\overrightarrow{CE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3-5 \\ -4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$
$\det(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CE}) = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = -1 \times (-8) - (-4) \times (-2) = 0$
$\det(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CE}) = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires.
Les points C, B et E sont donc alignés.

4. Soit F le point tel que $\overrightarrow{AF} = -5\overrightarrow{AD}$

a. Montrer par le calcul que F a pour coordonnées $F(-7; -21)$.

$\overrightarrow{AF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_F + 2 \\ y_F + 1 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1+2 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
Donc $-5\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -5 \\ -20 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AF} = -5\overrightarrow{AD}$ donc $\begin{pmatrix} x_F + 2 \\ y_F + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -20 \end{pmatrix}$
On obtient :
$x_F + 2 = -5 \Leftrightarrow x_F = -7$
$y_F + 1 = -20 \Leftrightarrow y_F = -21$
Donc F a bien pour coordonnées $F(-7; -21)$.

b. Les droites (DF) et (BC) sont-elles parallèles ?

$\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -7+1 \\ -21-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -24 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
$\det(\overrightarrow{DF}; \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ -24 & 4 \end{vmatrix} = (-6) \times 4 - (-24) \times 1 = 0$
$\det(\overrightarrow{DF}; \overrightarrow{BC}) = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
Les droites (DF) et (BC) sont donc parallèles.

Exercice 5 (non obligatoire)

Soit $A(-4; -3)$, $B(-2; 5)$ et $C(3; -1)$ trois points d'un repère.

Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

$\overrightarrow{GA}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -4 - x_G \\ -3 - y_G \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{GB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2 - x_G \\ 5 - y_G \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{GC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 - x_G \\ -1 - y_G \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ a donc pour coordonnées
$\begin{pmatrix} -4 - x_G - 2 - x_G + 3 - x_G \\ -3 - y_G + 5 - y_G - 1 - y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 3x_G \\ 1 - 3y_G \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ donc $\begin{pmatrix} -3 - 3x_G \\ 1 - 3y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On obtient :
$-3 - 3x_G = 0 \Leftrightarrow 3x_G = -3 \Leftrightarrow x_G = -1$
$1 - 3y_G = 0 \Leftrightarrow 3y_G = 1 \Leftrightarrow y_G = \frac{1}{3}$
Le point G a pour coordonnées $G\left(-1; \frac{1}{3}\right)$.

Exercice 6 (non obligatoire)

Soit B, C et D trois points.

A l'aide de la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{D\underline{C}} + \overrightarrow{\underline{C}B} + \overrightarrow{DB} \underset{\text{Chasles}}{=} \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}$

D'où $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{DB}$

Exercice 7 (non obligatoire)

Soit ABC un triangle. On considère les points D et E tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$

1. En décomposant $\overrightarrow{AE}$ à l'aide de la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AE} \underset{\text{Chasles}}{=} \overrightarrow{A\underline{D}} + \overrightarrow{\underline{D}E} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{A\underline{B}} + \overrightarrow{\underline{B}C}) \underset{\text{Chasles}}{=} \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

2. Que peut-on en conclure sur les points A, E et C ?

Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AE} = k\,\overrightarrow{AC}$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Les points A, E et C sont donc alignés.

V Fonctions

Exercice 1 (non obligatoire)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 5$.

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en détaillant les calculs :

x	-1	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	3
$f(x)$	-6	$-\frac{15}{4}$	$2\sqrt{2}-3$	10

$f(-1) = (-1)^2 + 2\times(-1) - 5 = 1 - 2 - 5 = -6$
$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\times\frac{1}{2} - 5 = \frac{1}{4} + 1 - 5 = \frac{1}{4} - 4 = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}$
$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2} - 5 = 2 + 2\sqrt{2} - 5 = 2\sqrt{2} - 3$
$f(3) = 3^2 + 2\times 3 - 5 = 9 + 6 - 5 = 10$

2. Le point $A(-2;-13)$ appartient-il à la courbe représentative de la fonction f ? Justifier.

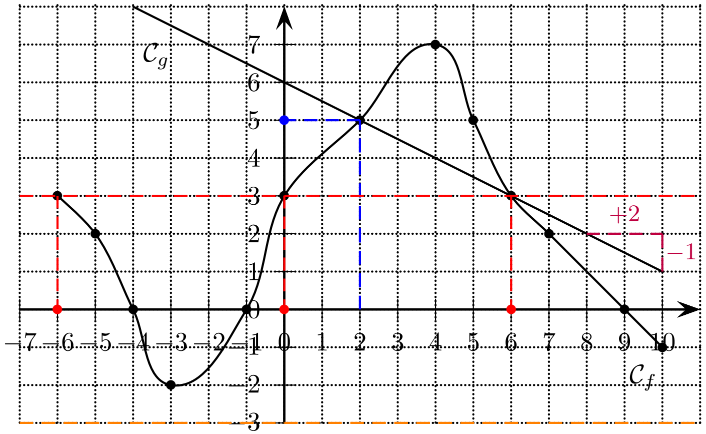
$f(-2) = (-2)^2 + 2\times(-2) - 5 = 4 - 4 - 5 = -5 \neq -13$.
Donc $A(-2;-13)$ n'appartient pas à la courbe représentative de f.

3. Donner les coordonnées d'un point B qui appartient à la courbe représentative de f.

D'après la question précédente, on a $f(-2) = -5$.
Donc on peut choisir $B(-2;-5)$.

Exercice 2

On a tracé ci-dessous les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g.



Partie A. Étude de la fonction f

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

L'ensemble de définition de la fonction f est $\mathcal{D}_f = [-6; 10]$.

2. Lire graphiquement l'image de 2.

(En bleu) $f(2) = 5$

3. Donner les éventuels antécédents de -3 par la fonction f.

(En orange) Sur $[-6; 10]$, -3 ne possède aucun antécédent par la fonction f.

4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$.

(En rouge) Sur $[-6; 10]$, les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont -6, 0 et 6.

5. Déterminer les extrema de la fonction f sur son ensemble de définition. Préciser en quelles valeurs ils sont atteints.

Sur $[-6; 10]$,
Le maximum de la fonction f est 7. Il est atteint pour $x = 4$.
Le minimum de la fonction f est -2. Il est atteint pour $x = -3$.

6. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition.

x	-6		-3		4		10
Variation de f	3	↘	-2	↗	7	↘	-1

7. Dresser le tableau de signe de la fonction f sur son ensemble de définition.

x	-6		-4		-1		9		10
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Partie B. Étude de la fonction g

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -\dfrac{1}{2}x + 6$.

La courbe $\mathcal{C}_g$ est une droite donc il existe m et p deux réels tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = mx + p$.
Graphiquement, $p = 6$ (ordonnées à l'origine)
De plus, $m = \dfrac{-1}{+2} = -\dfrac{1}{2}$
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -\dfrac{1}{2}x + 6$.

2. Déterminer par le calcul les éventuels antécédents de 7 par la fonction g.

On résout $g(x) = 7$ sur $\mathbb{R}$.
$g(x) = 7 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x + 6 = 7 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = -2$.
-2 est donc l'unique antécédent de 7 par la fonction g.

3. Dresser le tableau de signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x + 6 = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x = -6 \Leftrightarrow x = 12$ et $-\dfrac{1}{2} < 0$

x	$-\infty$		12		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie C. Position relative entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

1. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.

Sur $[-6; 10]$, les solutions de $f(x) = g(x)$ sont 2 et 6.

2. Résoudre graphiquement $f(x) < g(x)$.

Sur $[-6; 10]$, l'ensemble de solutions de $f(x) < g(x)$ est $[-6; 2[\cup]6; 10]$.

3. En déduire la position relative entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Sur $[-6; 10]$,
Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en $x = 2$ et $x = 6$.
La courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $]2; 6[$.
La courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $[-6; 2[\cup]6; 10]$.

Exercice 3 (non obligatoire)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x - 7$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-3)^2 - 16$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$(x-3)^2 - 16 = x^2 - 6x + 9 - 16 = x^2 - 6x - 7 = f(x)$
On a donc bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-3)^2 - 16$.

2. En utilisant l'une des deux expressions de f :

a. Déterminer les éventuels antécédents de -7 par la fonction f.

On résout $f(x) = -7$ sur $\mathbb{R}$.
$f(x) = -7 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 = -7 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x-6) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 6$.
-7 possède deux antécédents : 0 et 6.

b. Déterminer les éventuels antécédents de 0 par la fonction f.

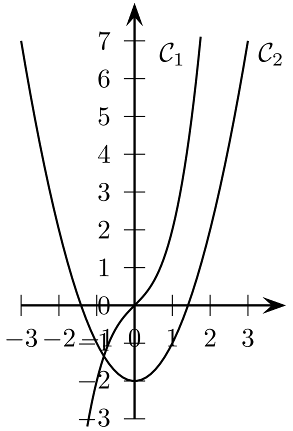
On résout $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 16 \Leftrightarrow x - 3 = 4$ ou $x - 3 = -4$
$\Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -1$
0 possède deux antécédents : -1 et 7.

3. En utilisant la deuxième expression de f et les variations de la fonction carrée, montrer que la fonction f est croissante sur $[3; +\infty[$.

Soit x et y deux réels de $[3; +\infty[$,
$3 \leq x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq x - 3 \leq y - 3$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 \leq (y-3)^2$ car la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 - 16 \leq (y-3)^2 - 16$
$\Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$
Pour tout x, y dans $[3; +\infty[$, si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$.
Donc la fonction f est croissante sur $[3; +\infty[$.

Exercice 4 (non obligatoire)

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$



1. On sait que f est paire et que g est impaire.
Identifier la courbe représentative de f et celle de g.

La courbe $\mathcal{C}_1$ est symétrique par rapport à l'origine du repère. C'est donc la courbe représentative d'une fonction impaire, donc celle de la fonction g.
La courbe $\mathcal{C}_2$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. C'est donc la courbe représentative d'une fonction paire, donc celle de la fonction f.

2. On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$.
Montrer par le calcul que f est paire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x)$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ donc la fonction f est paire.

3. On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - x$.
Montrer par le calcul que g est impaire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -g(x)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = -g(x)$ donc la fonction g est impaire.

VI Probabilités

Exercice 1 (non obligatoire)

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8. On tire au hasard un jeton et on note son numéro. On considère les événements suivants :
- A : « obtenir un nombre pair »
- B : « obtenir un multiple de 3 »
- C : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 »

1. Écrire sous forme d'un ensemble les événements A, B et C.

$A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{3, 6\}$ et $C = \{1, 2\}$

2. Décrire par une phrase l'événement $\overline{A}$, puis l'écrire sous forme d'un ensemble.

$\overline{A}$ est l'évènement « obtenir un nombre impair » .
$\overline{A} = \{1, 3, 5, 7\}$

3. Écrire sous forme d'un ensemble les événements $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cup B$ et $\overline{\overline{A} \cup C}$.

$A \cap B = \{6\}$.
$B \cap C = \emptyset$.
$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8\}$.
$\overline{A} \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ donc $\overline{\overline{A} \cup C} = \{4, 6, 8\}$.

Exercice 2 (non obligatoire)

Dans tous l'exercice, on donnera les probabilités sous forme de fractions irréductibles.

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On note :
• C l'événement : « la carte tirée est un coeur »
• R l'événement : « la carte tirée est un roi »
• N l'événement : « la carte tirée est noire »

1. Déterminer $\text{P}(C)$, $\text{P}(R)$ et $\text{P}(N)$.

$\text{P}(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.
En effet, il y a 8 cartes coeur dans un jeu de 32 cartes (équiprobabilité).
$\text{P}(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
En effet, il y a 4 rois dans un jeu de 32 cartes (équiprobabilité).
$\text{P}(N) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.
En effet, il y a 16 cartes noires dans un jeu de 32 cartes (équiprobabilité).

2. Décrire par une phrase l'événement $C \cap R$, puis calculer sa probabilité.

$C \cap R$ est l'évènement « la carte tirée est un roi de coeur » .
$\text{P}(C \cap R) = \frac{1}{32}$.
En effet, il n'y a qu'une carte qui soit un roi de coeur.

3. Décrire par une phrase l'événement $R \cup N$, puis calculer sa probabilité.

$R \cup N$ est l'évènement « la carte tirée est une carte noire ou une carte roi » .
$\text{P}(R \cup N) = \text{P}(R) + \text{P}(N) - \text{P}(R \cap N) = \frac{4}{32} + \frac{16}{32} - \frac{2}{32} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$.
($\text{P}(R \cap N) = \frac{2}{32}$*. En effet, il y a deux cartes noires qui sont des rois.)*

Exercice 3 (non obligatoire)

Dans tous l'exercice, on donnera les probabilités sous forme décimale.

Un sac contient des jetons carrés ou ronds, de couleur verte, bleue ou noire.
Il y a donc des jetons carrés de couleur verte, carrés de couleur bleue, carrés de couleur noire, ronds de couleur verte, ronds de couleur bleue, ronds de couleur noire.

Voilà les informations dont nous disposons sur ces jetons :
• il y a 10 jetons verts. 40% des jetons verts sont carrés
• il y a 12 jetons bleus, et la moitié sont carrés
• il y a 18 jetons noirs, dont 14 ronds

Les jetons sont indiscernables au toucher. On tire au hasard un jeton dans le sac.

1. Justifier, à l'aide de l'énoncé, qu'il y a 4 jetons carrés de couleur verte.

Il y a 10 jetons verts et 40% de ces jetons sont carrés.
Donc il y a $\frac{40}{100} \times 10 = 4$ jetons carrés de couleur verte.

2. Compléter le tableau suivant pour donner le nombre de jetons de chaque sorte :

	Vert	Bleu	Noir	TOTAL
Carré	4	6	4	14
Rond	6	6	14	26
TOTAL	10	12	18	40

3. Soit V l'événement « le jeton tiré est vert » et R l'événement « le jeton tiré est rond »

a. Déterminer $\text{P}(V)$ et $\text{P}(R)$.

$\text{P}(V) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0,25$ et $\text{P}(R) = \frac{26}{40} = \frac{13}{20} = 0,65$.

b. Décrire par une phrase l'événement $\overline{V}$, puis calculer sa probabilité.

$\overline{V}$ est l'évènement « le jeton tiré n'est pas vert » ou « le jeton tiré est bleu ou noir ».
$P(\overline{V}) = 1 - P(V) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$.

4. Déterminer la probabilité de l'événement A : « le jeton est carré et n'est pas bleu »

Il y a 8 jetons carrés qui ne sont pas bleus. Donc $P(A) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} = 0,2$.

5. Soit B l'événement « le jeton est rond de couleur verte » .

a. Exprimer cet événement en fonction des événements V et R.

L'évènement B est l'évènement $V \cap R$.

b. Déterminer $P(B)$.

$P(B) = P(V \cap R) = \frac{6}{40} = \frac{3}{20} = 0,15$.
En effet, il y a 6 jetons qui sont ronds et de couleur verte.

c. En déduire la probabilité de l'événement « le jeton est rond ou de couleur verte »

On cherche $P(V \cup R)$.
$P(V \cup R) = P(V) + P(R) - P(V \cap R) = \frac{10}{40} + \frac{26}{40} - \frac{6}{40} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0,75$.

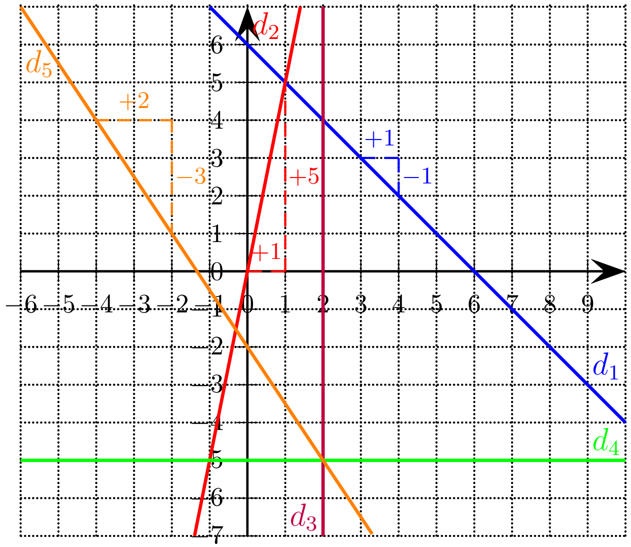
6. On choisit un jeton vert. Quelle est la probabilité qu'il soit carré ?

Dans cette question, on ne se réfère plus à l'ensemble des 40 jetons mais uniquement à l'ensemble des 10 jetons verts.
Parmi ces 10 jetons verts, il y en a 4 qui sont carrés.
Ainsi, la probabilité que le jeton soit carré sachant qu'il est vert est de $\frac{4}{10} = 0,4$.
On la note $P_V(C)$.

VII Équations de droites

Exercice 1 (non obligatoire)

Déterminer graphiquement l'équation réduite de chacune des droites suivantes :



• d_1 n'est pas parallèle à l'axe de ordonnées donc d_1 a une équation réduite de la forme $y = mx + p$ avec m et p deux réels.
$m = \dfrac{-1}{+1} = -1$ et $p = 6$ (ordonnée à l'origine)
Donc d_1 a pour équation réduite $y = -x + 6$
• d_2 n'est pas parallèle à l'axe de ordonnées donc d_2 a une équation réduite de la forme $y = mx + p$ avec m et p deux réels.
$m = \dfrac{+5}{+1} = 5$ et $p = 0$ (ordonnée à l'origine)
Donc d_2 a pour équation réduite $y = 5x$
• d_3 est parallèle à l'axe des ordonnées et coupe l'axe des abscisses en $x = 2$.
Donc d_3 a pour équation réduite $x = 2$.
• d_4 est parallèle à l'axe des abscisses et coupe l'axe des ordonnées en $y = -5$.
Donc d_4 a pour équation réduite $y = -5$.

• d_5 n'est pas parallèle à l'axe de ordonnées donc d_5 a une équation réduite de la forme $y = mx + p$ avec m et p deux réels.

$m = \frac{-3}{+2} = -\frac{3}{2}$ et $p = -2$ (ordonnée à l'origine)

Donc d_5 a pour équation réduite $y = -\frac{3}{2}x - 2$

Exercice 2 (non obligatoire)

1. Dans un repère, tracer les droites d_1 et d_2 d'équation respective $y = -0,5x-2$ et $y = 4x - 3$.

• Pour d_1 : L'ordonnée à l'origine est -2.

De plus, pour $x = 2$,

$y = -0,5 \times 2 - 2 = -1 - 2 = -3$.

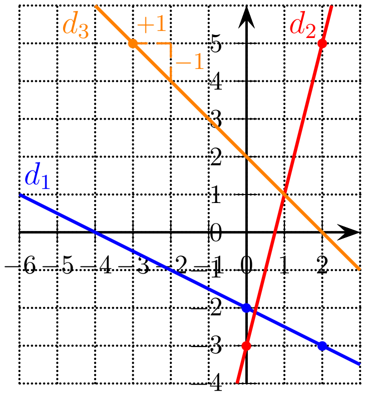
Donc le point $(2; -3)$ appartient à d_1.

• Pour d_3 : L'ordonnée à l'origine est -3.

De plus, pour $x = 2$,

$y = 4 \times 2 - 3 = 8 - 3 = 5$.

Donc le point $(2; 5)$ appartient à d_2.



2. a. Tracer la droite d_3 passant pas le point $A(-3; 5)$ et de coefficient directeur -1.

b. Déterminer l'équation réduite de d_3.

d_3 a pour coefficient directeur -1 donc d_3 a une équation réduite de la forme $y = -x + p$, avec $p \in \mathbb{R}$.

De plus, $A(-3; 5) \in d_3$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de d_3 :

$5 = -(-3) + p \Leftrightarrow 5 = 3 + p \Leftrightarrow p = 5 - 3 = 2$

Donc l'équation réduite de d_3 est $y = -x + 2$

3. a. Justifier que les droites d_1 et d_2 sont sécantes.

Le coefficient directeur de d_1 est $-0,5$ et celui de d_2 est 4.

Les droites d_1 et d_2 n'ont pas le même coefficient directeur. Donc elles sont sécantes.

b. Déterminer les coordonnées de M point d'intersection de d_1 et d_2.

On doit résoudre le système $\begin{cases} y &= -0,5x - 2 \\ y &= 4x - 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} y &= -0,5x - 2 \\ y &= 4x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= -0,5x - 2 \\ -0,5x - 2 &= 4x - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y &= -0,5x - 2 \\ -0,5x - 4x &= -3 + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y &= -0,5x - 2 \\ -4,5x &= -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y &= -0,5 \times \frac{2}{9} - 2 = -\frac{1}{9} - \frac{18}{9} = -\frac{19}{9} \\ x &= \frac{-1}{-4,5} = \frac{2}{9} \end{cases}$$

Le point d'intersection des droites d_1 et d_2 a pour coordonnées $M\left(\frac{2}{9}; -\frac{19}{9}\right)$.

4. Le point M appartient-il à d_3 ?

$-x_M + 2 = -\frac{2}{9} + 2 = -\frac{2}{9} + \frac{18}{9} = \frac{16}{9} \neq y_M$

Donc le point $M\left(\frac{2}{9}; -\frac{19}{9}\right)$ n'appartient pas à la droite d_3.

Exercice 3 (non obligatoire)

1. Soit $A(-6;-3)$ et $B(6;5)$ deux points d'un repère.

Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - yA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-(-6) \\ 5-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) donc (AB) a une équation cartésienne de la forme $8x - 12y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
De plus, $A(-6;-3) \in (AB)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de (AB) :
$8 \times (-6) - 12 \times (-3) + c = 0 \Leftrightarrow -12 + c = 0 \Leftrightarrow c = 12$.
Donc $8x - 12y + 12 = 0$ est une équation cartésienne de (AB).

2. Soit d la droite d'équation $3x + 2y + 11 = 0$.

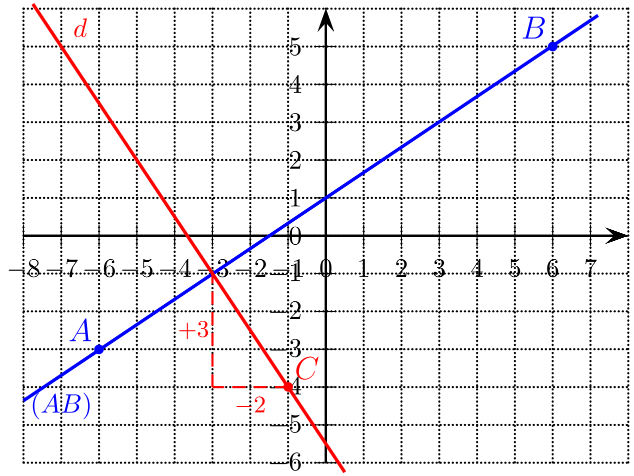
a. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ directeur de la droite d.

d a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$
avec $a = 3$et $b = 2$
Un vecteur directeur de d est $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b. Le point $C(-1;-4)$ appartient-il à la droite d ?

$3 \times (-1) + 2 \times (-4) + 11 = -3 - 8 + 11 = 0$
Donc $C(-1;-4)$ appartient à la droite d.

3. Dans un repère, tracer les droites (AB) et d.



4. Conjecturer graphiquement les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et d.

Graphiquement, le point d'intersection des droites (AB) et d semble avoir pour coordonnées $(-3;-1)$.

5. a. Justifier que les droites (AB) et d sont sécantes.

Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$
Un vecteur directeur de d est $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\det(\overrightarrow{AB};\vec{u}) = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 12 \times 3 - 8 \times (-2) = 52$
$\det(\overrightarrow{AB};\vec{u}) \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.
Les droites (AB) et d sont donc sécantes.

b. Retrouver par le calcul les coordonnées du point d'intersection de (AB) et d.

On doit résoudre le système $\begin{cases} 8x - 12y + 12 &= 0 \\ 3x + 2y + 11 &= 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 8x-12y+12 &= 0 \\ 3x+2y+11 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-12y+12 &= 0 \\ 18x+12y+66 &= 0 \end{cases} (L_2 \leftarrow 6L_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x-12y+12 &= 0 \\ 26x+78 &= 0 \end{cases} (L_2 \leftarrow L_1+L_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8\times(-3)-12y+12 &= 0 \\ x &= -\dfrac{78}{26} = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -12y &= -12+24 = 12 \\ x = -\dfrac{78}{26} &= -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y &= \dfrac{12}{-12} = -1 \\ x &= -3 \end{cases}$$

Donc le point d'intersection des droites (AB) et d a pour coordonnées $(-3;-1)$