Feuille de révision 2nde 1ère : Corrigé

Exercice 1 : Techniques de calculs

1) Calculs et simplification sans calculatrice.

$$A = \frac{\dfrac{\frac{2}{8}}{\frac{1}{3}} - \dfrac{3}{\frac{5}{2}}}{\dfrac{2}{5}} = \frac{\frac{2}{8} \times \frac{3}{1} - \frac{3}{1} \times \frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = \left(\frac{3}{4} - \frac{6}{5}\right) \times \frac{5}{2} = \frac{15-24}{20} \times \frac{5}{2} = \frac{-9}{8}$$

$B = \dfrac{3^5 \times 7^4}{21^3} = \dfrac{3^5 \times 7^4}{3^3 \times 7^3} = 3^2 \times 7^1 = 63$;

$C = \sqrt{12} - \sqrt{27} + 5\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \times 3} - \sqrt{3^2 \times 3} + 5\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - -3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

2) **a**) On multiplie le dénominateur par sa forme conjuguée ($\sqrt{5} + \sqrt{2}$) :

$$A = \frac{1 \times \left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5}^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{5-2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3}$$

b) On multiplie le dénominateur par sa forme conjuguée ($\sqrt{5} - \sqrt{2}$) :

$$B = \frac{\sqrt{3} \times \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{5-2} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{3}$$

d) On multiplie le dénominateur par sa forme conjuguée ($\sqrt{3} + 2$) :

$$D = \frac{\left(\sqrt{3} + 2\right)^2}{\left(\sqrt{3} - 2\right)\left(\sqrt{3} + 2\right)} = \frac{3 + 4\sqrt{3} + 4}{\sqrt{3}^2 - 2^2} = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{3-4} = -7 - 4\sqrt{3}.$$

3) **a**) Cette expression a un sens si et seulement si $2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$$A = \frac{1}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x^2+1}{2x} = \frac{1 \times 2x - 3x \times x + 3(x^2+1)}{3 \times 2x} = \frac{2x - 3x^2 + 3x^2 + 3}{6x} = \frac{2x+3}{6x}$$

b) Cette expression a un sens si et seulement si $3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$$B = \frac{2+x^2}{3x} - \frac{x-1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2+x^2}{3x} - \frac{(x-1)x}{3x} + \frac{1 \times x}{3x} = \frac{2x+2}{3x}.$$

c) Cette expression a un sens si et seulement si $3x \neq 0$ et $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq -1$.

$$C = \frac{5}{3x} - \frac{2x-1}{x+1} + 2 = \frac{5(x+1)}{3x(x+1)} - \frac{3x(2x-1)}{3x(x+1)} + \frac{2 \times 3x(x+1)}{3x(x+1)} = \frac{5x + 5 - 6x^2 + 3x + 6x^2 + 6}{3x(x+1)} = \frac{8x+11}{3x(x+1)}$$

Exercice 2 : Propriétés des fonctions usuelles

1) **a**) Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{x+1}{4} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$. La fonction f est donc affine.

b) Le coefficient de proportionnalité de f est positif ($a = \frac{1}{4} > 0$), elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) $\dfrac{x+1}{4} > 0 \Leftrightarrow x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ et $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Le tableau de signe de $f(x)$ est donc :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe $f(x)$		$-$	0	$+$	

2) Soit $g(x) = (x+1)^2 - 4$ pour tout réel x.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (x+1)^2 - 4 = x^2 + 2x + 1 - 4 = x^2 + 2x - 3$.

b) D'après la forme canonique de g, on a $a = 1$, $\alpha = -1$ et $\beta = -4$ tel que $g(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Ainsi, g est strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$ à valeurs dans $[-4; +\infty[$ et strictement croissante sur $[-1; +\infty[$ à valeurs dans $[-4; +\infty[$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (x+1)^2 - 4 = (x+1)^2 - 2^2 = (x + 1 - 2)(x + 1 + 2) = (x-1)(x+3)$.

d) Ci-dessous, le tableau de signe de cette fonction :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe $(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe $(x+3)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$; $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-3;1[$ et $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 1$.

3) On considère la fonction h définie sur $[0,5 ; 5]$ par $h : x \to x + \frac{2}{x} - 3$.

a) A l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer le tableau de variations de h :

x	$0,5$		$1,4142$		5
	$1,5$				$0,3$
Variations de h		$\searrow$		$\nearrow$	
			$-0,1716$		

b) Soit $x \in [0,5 ; 5]$, $h(x) = x + \frac{2}{x} - 3 = \frac{x \times x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3 \times x}{x} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$.

Or $(x-1) \times (x-2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2$.

Donc on a bien : $h(x) = \frac{(x-1) \times (x-2)}{x}$ pour tout réel $x \in [0,5 ; 5]$.

c) On remarque que :

◂ l'expresssion $x - 1$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 1$ et $b = 1$. Elle s'annule en 1. De plus, a est positif ;

◂ l'expresssion $x - 2$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 1$ et $b = -2$. Elle s'annule en 2. De plus, a est positif ;

◂ x est positif sur $[0,5 ; 5]$.

On en déduit le tableau de signes de $h(x)$ sur $[0,5 ; 5]$:

x	$0,5$		1		2		5
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$		$+$	
Signe de $h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d) Résoudre $h(x) \leq 0$ sur $[0,5 ; 5]$.

D'après le tableau de signe ci-dessus, on obtient $h(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1 ; 2]$

Exercice 3 : Eude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{2x-5}{3-x}$

On nomme (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère.

1) Soit $x \neq 3$, $\frac{1}{3-x} - 2 = \frac{1}{3-x} - \frac{2(3-x)}{3-x} = \frac{1-6+2x}{3-x} = \frac{2x-5}{3-x} = f(x)$.

2) **a**) Calculer l'image de $\sqrt{3}$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}-5}{3-\sqrt{3}} = \frac{\left(2\sqrt{3}-5\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)} = \frac{6\sqrt{3} + 2 \times 3 - 5 \times 3 - 5\sqrt{3}}{9-3} = \frac{-9+\sqrt{3}}{6};$$

L'image de $\sqrt{3}$ par f est $\frac{-9+\sqrt{3}}{6}$.

b) Résoudre l'équation $f(x) = 4$

Soit $x \neq 3$, $f(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{3-x} = 4 \Leftrightarrow 2x - 5 = 12 - 4x \Leftrightarrow 6x = 17 \Leftrightarrow x = \frac{17}{6}$. Ainsi, $S = \left\{\frac{17}{6}\right\}$.

c) Résoudre l'équation $f(x) = -2$

Soit $x \neq 3$, $f(x) = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{3-x} - 2 = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{3-x} = 0$, mais il n'existe aucun réel x vérifiant cette dérnière égalité. $S = \varnothing$

d) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.

Cela revient à résoudre l'équation : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{3-x} = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 2,5$.

Le seul point d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(2,5 ; 0)$.

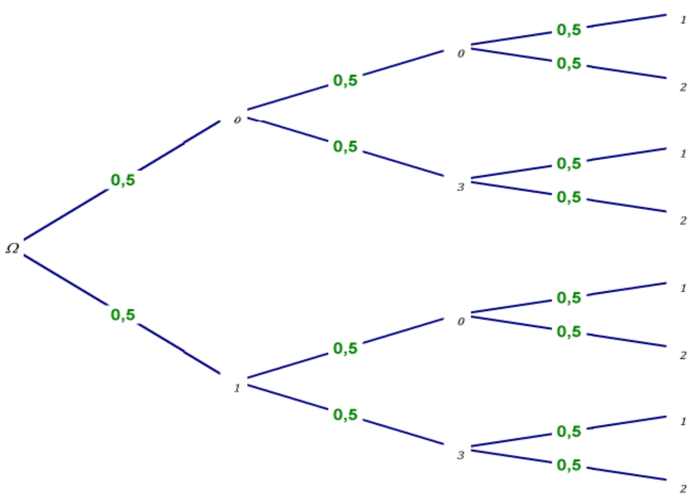
e) Déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées.
Il suffit de calculer l'image de 0 par f. En effet, $f(0) = \dfrac{2 \times 0 - 5}{3 - 0} = \dfrac{-5}{3}$.
Le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées a pour coordoonées $\left(0\ ;\ \dfrac{-5}{3}\right)$.
f) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y = 4$.
D'après **b**), le seul point d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y = 4$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{17}{6}\ ;\ 4\right)$.
g) Déterminer le point d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $x = \sqrt{3}$.
D'après **a**), le seul point d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $x = \sqrt{3}$ a pour coordonnées $\left(\sqrt{3}\ ;\ \dfrac{-9 + \sqrt{3}}{6}\right)$.
3) On s'intéresse aux variations de la fonction f sur $]3;+\infty[$:
a) Justifier chaque étape du raisonnement suivant :

$3 < a \leq b$	On choisit deux reél a et b quelconques tel que $3 < a \leq b$
$0 > 3 - a \geq 3 - b$	On multiplie par $-1 < 0$, les inégalités changent de sens puis on ajoute 3
$\dfrac{1}{3 - a} \leq \dfrac{1}{3 - b} < 0$	car la fonction inverse $x \rightarrow \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ 0\right[$
$\dfrac{1}{3 - a} - 2 \leq \dfrac{1}{3 - b} - 2 < 2$	On rajoute -2 de part et d'autre.

b) On déduit que, si $3 < a \leq b$ alors $\dfrac{1}{3 - a} - 2 \leq \dfrac{1}{3 - b} - 2$, c'est-à-dire $f(a) \leq f(b)$.
La fonction f est donc croissante sur $]3;+\infty[$.

Exercice 4

a) La variable S est la somme des numéros des trois boules à la fin de l'algorithme. Au départ, avant de tirer la première boule, cette somme est forcément nulle.
b) La fonction $\text{rand}()$ renvoie un nombre aléatoire appartenant à $[0;1[$.
On a donc une chance sur deux que ce nombre soit supérieur à $0,5$.
Si $\text{rand}() > 0,5$, alors S augmente de 1 (ligne 4). Cela simule le tirage de la boule 1 dans la première urne. Dans l'autre cas, S reste égal à 0 , comme si l'on avait tiré la boule 0 dans la première urne.
c) De même, les lignes 5 et 6 permettent de simuler le tirage dans la deuxième urne.
En effet, on a une chance sur deux de tirer la boule portant le numéro 3 (ligne 6). Dans l'autre cas, S reste égal à sa valeur précédente.
d) Les lignes 7 à 10 permettent de simuler le tirage dans la trosième urne. Dans ce cas il y a une instruction "sinon" en plus.
On a une chance sur deux de tirer le 1 , donc S augmente de 1 (ligne 8) et une chance sur deux de tirer le 2 , donc S augmente de 2 (ligne 10).
2) On peut modéliser cette expérience aléatoire par l'arbre suivant :



$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

3) Les 8 chemins sont équiprobables. On constate que deux chemins permettent d'obtenir 2 et deux chemins d'obtenir 5. Les autres valeurs ne s'obtiennent que par un seul chemin.
On a donc la loi suivante :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

Exercice 5

1)

Etape	x	Test $x < 20$ (oui/non)
Initialisation	3	oui
Etape 1	6	oui
Etape 2	12	oui
Etape 3	24	non

2) La valeur affichée est 24.

Exercice 6 (Uniquement pour les futurs 1S et 1STI)

Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(-4,5\ ;\ 1)$; $B(-2\ ;\ 3)$; $C(-2\ ;\ -1)$ et $D(3\ ;\ 3)$.

a) Pour savoir si les droites (AB) et (CD) sont parallèles, déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ pour vérifier s'ils sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2-(-4,5) \\ 3-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2,5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 3-(-1) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On peut remarquer que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. On en déduit que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

b) $E(7;14)$ appartient à la droite (CD) si, et seulement si, les points C, D et E sont alignés, autrement dit si, et seulement si, les $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 7-3 \\ 14-3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$.

$5 \times 11 - 4 \times 4 = 55 - 16 = -1 \neq 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont donc pas colinéaires, et par conséquent les points C, D et E ne sont pas alignés. Enfin, le point E n'est pas sur (CD).

c) On note $(x\ ,\ 0)$ les coordonnées du point F recherché.

Les droites (AC) et (DF) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.

On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2,5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} x-3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow 2,5 \times (-3) - (-2) \times (x-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 13,5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{13,5}{2} = 6,75$.

Par conséquent, si F a pour coordonnées $(6,75;0)$ alors les droites (AC) et (DF) sont parallèles.

Exercice 7 (Uniquement pour les futurs 1S et 1STI)

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(-2;1)$, $B(2;3)$ et $C(3;-1)$.

1) On note à chaque fois que c'est nécessaire, $(x\ ,\ y)$ les coordonnées du point recherché.

a) $C'\ (x\ ,\ y)$ est le symétrique de C par rapport à B

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 2-3 \\ y-3 = 3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1+2 = 1 \\ y = 4+3 = 7 \end{cases}$, d'où $C'\ (1\ ,\ 7)$.

b) D image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 2 + 2 \\ y + 1 = 3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 3 = 7 \\ y = 2 - 1 = 1 \end{cases}$,

d'où $D\,(7\ ,\ 1)$.

c) E est tel que $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AB}\left(4\ ;\ 2\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 3 \times 4 \\ y - 1 = 3 \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 - 2 = 10 \\ y = 6 + 1 = 7 \end{cases}$, d'où $E\,(10\ ,\ 7)$.

d) Si J est milieu de $[DC']$, alors $x_J = \dfrac{x_D + x_{C'}}{2} = \dfrac{7+1}{2} = 4$ et $y_J = \dfrac{y_D + y_{C'}}{2} = \dfrac{1+7}{2} = 4$. soit $J\,(4\ ,\ 4)$.

2) Pour montrer que J est le milieu de $[AE]$, on peut calculer les coordonnées du milieu de $[AE]$ et les comparer à celles de J ; ou bien vérifier que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JE}$.

$\dfrac{x_A + x_E}{2} = \dfrac{-2+10}{2} = 4 = x_J$ et $\dfrac{y_A + y_E}{2} = \dfrac{1+7}{2} = 4 = y_J$. Donc J est bien le milieu de $[AE]$.

$[AE]$ et $[DC']$ ont le même milieu, donc $ABEC'$ est un parallélogramme.

3) **a**) $M(m\ ;5) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{AM}\,(m+2;\mathbf{4})$ et $\overrightarrow{AB}(4;\mathbf{2})$ et on remarque que $\mathbf{4} = 2 \times \mathbf{2}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow 2(m+2) - 4 \times 4 = 0 \Leftrightarrow m + 2 = 8 \Leftrightarrow m = 6$. D'où $M(6\ ;\ 5)$.

b) $\overrightarrow{CP}\left(p + 5 - 3\ ;\ p + 1\right)$ c'est-à–dire $\overrightarrow{CP}\left(p + 2\ ;\ p + 1\right)$

$\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires$\Leftrightarrow (p+2) \times 2 - (p+1) \times 4 = 0 \Leftrightarrow 2p + 4 - 4p - 4 = 0 \Leftrightarrow -2p = 0 \Leftrightarrow p = 0$.

D'où $P(5\ ;\ 0)$.

c) Comme $M \in (AB)$, alors $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{CP}$ sont tous deux colinéaires à $\overrightarrow{AB}$; d'où (BM) et (CP) sont parallèles. Ainsi le quadrilatère $MPCB$ est un trapèze.