

Fiche de révision-été

A. Exercices sur les fonctions circulaires.

Exercice 1

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x + 0,3^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - 0,3^2 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0,91 \Leftrightarrow \cos x = -\sqrt{0,91}$
ou $\cos x = \sqrt{0,91}$. Or $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\cos x \leq 0$ donc $\cos x = -\sqrt{0,91}$

On en déduit : $\cos(-x) = \cos x = -\sqrt{0,91}$; $\sin(\pi - x) = \sin x = 0,3$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = 0,3$ et
 $\sin(5\pi + x) = \sin(x + \pi + 4\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x = -0,3$

Comme $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ on en déduit qu'une valeur de x arrondie au dixième de radian sera :

$$\pi - \text{Arcsin}(0,3) \approx 2,8.$$

Exercice 2

1. L'équation $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ est équivalente à $\sin t = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Elle admet dans \mathbb{R} deux familles de solutions : $t = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ et $t = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Soit } t = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \text{ et } t = \frac{5\pi}{4} + k \times 2\pi ; k \in \mathbb{Z}.$$

2. $\cos t = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ équivaut à $\cos t = \frac{1}{2}$ équivaut à $\cos t = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Elle admet sur \mathbb{R} deux familles de solutions : $t = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$ et $t = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Or, $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ sont les deux seules valeurs appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Donc l'équation $\cos t = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ admet dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ deux solutions : $\left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$.

3. L'équation $\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ équivaut à $\sin t = \frac{1}{2}$ équivaut à $\sin t = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Elle admet sur \mathbb{R} deux familles de solutions : $t = \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi$ et $t = \pi - \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi = \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Or, $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ sont les deux seules valeurs appartenant à $] -\pi; \pi]$.

Donc l'équation $\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ admet dans $] -\pi; \pi]$ deux solutions : $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

Exercice 3

1. Graphiquement, on lit $T = 4$.

$$\text{Ainsi, } u(t + 4) = a \cos(b(t + 4)) = a \cos(bt + 4b) = u(t) = a \cos(bt).$$

La fonction cosinus étant périodique de période 2π , on en déduit que $4b = 2\pi$ soit

$$b = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \text{ On a alors : } u(t) = a \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

2. $u(0) = 3$ donc $a \cos(0) = 3$ soit $a = 3$ car $\cos(0) = 1$.

3. On en déduit que $u(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

B. Applications de la dérivation.

Exercice 1

1. f est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R} et, $f'(x) = 3x^2 + 4x$.

2. On a : $f(-1) = -3$ et $f'(-1) = -1$, une équation de la tangente T est :

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1), \text{ soit } y = (-1)(x + 1) - 3, \text{ soit } y = -x - 4.$$

3. $d(x) = f(x) - (-x - 4) = x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$

$d(x)$ a le signe de x car $(x + 1)^2$ est toujours positif ou nul.

4. Si $x < 0$ alors C_f est en dessous de T car $d(x) < 0$; si $x > 0$ alors C_f est au-dessus de T car $d(x) > 0$.

Exercice 2

1. $\forall x \in [-1; 4], g'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

L'équation $g'(x) = 0$, a pour racines 1 et 3, car $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 9 = 36$ et $x_1 = \frac{-(-12) - \sqrt{36}}{2 \times 3} = 1$; $x_2 = \frac{-(-12) + \sqrt{36}}{2 \times 3} = 3$. $g'(x)$ est du signe que $a = 3 > 0$, (donc positif) à l'extérieur des racines.

On a donc le tableau de variation suivant sur l'intervalle $[-1; 4]$:

x	-1	1	3	4	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
g	-18	↗ 2	↘ -2	↗ 2	

2. $g(2) = 2^3 - 6 \times 2^2 + 9 \times 2 - 2 = 0$; sur chacun des intervalles $[-1; 1]$, $[1; 3]$, $[3; 4]$, la fonction g est dérivable, strictement monotone et change de signe donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur chaque intervalle, soit 2 et deux autres solutions : α dans l'intervalle $[-1; 1]$ et β dans l'intervalle $[3; 4]$.

3. A l'aide de la calculatrice on trouve : $0,2 < \alpha < 0,3$ et $3,7 < \beta < 3,8$.

4. Ci-contre le tableau de signe de $g(x)$.

x	-1	α	2	β	4		
$g(x)$	-	0	+	0	-	0	+

C. Exercices sur le produit scalaire.

Exercice 1

1. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = -16 + 0 + 0 + 9 = -7$

2. $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

3. $OC = OD = \frac{1}{2}AC$, en utilisant l'égalité de Pythagore, $AC = 5$, soit : $OC = OD = \frac{5}{2}$.

4. D'après la réponse 1) et 2), $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = -\frac{7}{4}$, et $\cos(\widehat{DOC}) = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}}{OC \times OD} = -\frac{7}{25}$.

D'où $\widehat{DOC} \approx 106^\circ$.

Exercice 2

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 8 \times 4 \times \cos 60^\circ = 16$.

Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AH$ donc $AH = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{AB} = 2$.

En utilisant l'égalité de Pythagore : $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = 2\sqrt{3}$.

2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 48$, $AK = 6$ et $CK = 6$.

3. Aire(ABCD) = Aire(AHD) + Aire(HKCD) + Aire(KBC)

$$\text{AIRE}(AHD) = \frac{AH \times HD}{2} = 2\sqrt{3};$$

$$\text{AIRE}(HKCD) = \frac{(CK+DH) \times HK}{2} = \frac{(6+2\sqrt{3}) \times 4}{2} = 12 + 4\sqrt{3};$$

$$\text{Aire}(KBC) = \frac{BK \times KC}{2} = 6; \text{ d'où Aire}(ABCD) = 18 + 6\sqrt{3} \approx 28,39 \text{ u.a}$$

D. Probabilité

1. On répète 20 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli : « choisir une pièce au hasard » et vérifier si elle n'est pas conforme (succès de probabilité 0,02). On a donc un schéma de Bernoulli.

X compte le nombre de succès.

On peut donc conclure que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,02$.

2. $P(X = 0) = \binom{20}{0} \times 0,02^0 \times (1 - 0,02)^{20-0} \quad \boxed{P(X = 0) \approx 0,67}$

3. La probabilité qu'il y ait au moins une pièce non conforme est de :

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 0) \approx 0,33$$

4. $E(X) = np = 0,02 \times 20. \quad \boxed{E(X) = 0,4}$

$\boxed{\text{Il y a en moyenne } 0,4 \text{ pièces non conforme dans un lot de } 20.}$

5. Calculer la probabilité que l'entreprise doive rembourser le lot vendu (arrondir à 10^{-3}).

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2)$$

$$P(X \geq 3) \approx \boxed{0,007}$$

E. Exercice sur les suites

1. Si la suite u est géométrique alors $\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1}$

$$u_1 = 5u_0 + 2 = 5 \times 2 + 2 = 12$$

$$u_2 = 5u_1 + 2 = 5 \times 12 + 2 = 62$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{62}{12} \text{ et } \frac{u_1}{u_0} = \frac{12}{2} = 6$$

Donc, $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$, ainsi $\boxed{u \text{ n'est pas géométrique.}}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow v_{n+1} = 5u_n + 2 + \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = 5u_n + \frac{5}{2} \Leftrightarrow v_{n+1} = 5 \left(u_n + \frac{1}{2} \right) = 5v_n.$$

$\boxed{\text{La suite } v \text{ est donc géométrique de raison } 5.}$

$$v_0 = u_0 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \quad \boxed{\text{Donc, le premier terme de la suite } v \text{ est } \frac{5}{2}}$$

3. La suite v étant géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $\frac{5}{2}$ on a donc pour tout

$$n \in \mathbb{N} : v_n = v_0 q^n = \boxed{\frac{5}{2} \times 5^n}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $v_n = u_n + \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = v_n - \frac{1}{2}$

$$\text{Donc, pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a : } \boxed{u_n = \frac{5}{2} \times 5^n - \frac{1}{2}}$$