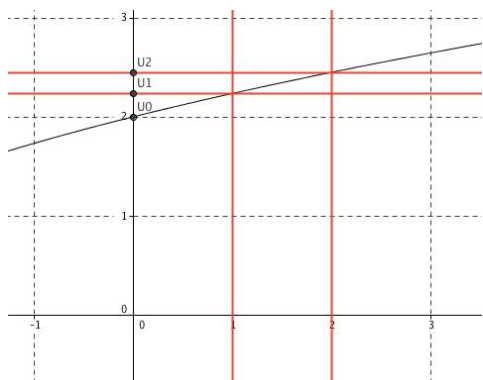


Correction feuille de révision pour septembre 2019

Exercice 1



$$u_0 = f(0) = \sqrt{0+4} = 2$$

$$u_1 = f(1) = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$u_2 = f(2) = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$$

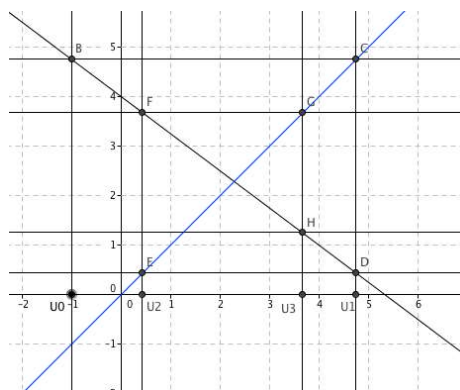
Exercice 2

$$u_0 = -1$$

$$u_1 = f(u_0) = f(-1) = \frac{19}{4}$$

$$u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{19}{4}\right) = \frac{7}{16}$$

$$u_3 = f(u_2) = f\left(\frac{7}{16}\right) = \frac{235}{64}$$



1)

$$u_1 - u_0 = \frac{19}{4} + 1 = \frac{23}{4} > 0 \text{ donc la suite } (u_n) \text{ n'est pas décroissante.}$$

$$u_2 - u_1 = \frac{7}{16} - \frac{19}{4} = -\frac{69}{16} < 0 \text{ donc la suite } (u_n) \text{ n'est pas croissante.}$$

Donc la suite (u_n) n'est pas monotone.

2)

$$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1 \text{ donc la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique.}$$

3)

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{19}{4}}{-1} = -\frac{19}{4} \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{19}{4}} = \frac{7}{76}$$

$$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1} \text{ donc la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique.}$$

$$4) \text{ Pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = f(u_{n-1}) = -\frac{3}{4}u_{n-1} + 4$$

Exercice 3

$$1) \text{ a) } u_1 = \frac{1}{2} \times 10 + 7 = \boxed{12}, u_2 = \frac{1}{2} \times 12 + 7 = \boxed{13}$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = g(u_n) \text{ avec } g(x) = \frac{1}{2}x + 7.$$

$$u_3 = \boxed{\frac{27}{2}} \quad u_4 = \boxed{\frac{55}{4}} \quad u_5 = \boxed{\frac{111}{8}}$$

b) $u_2 - u_1 = 13 - 12 = 1 \neq u_3 - u_2 = 13,5 - 13 = 0,5$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

2)

$$\text{a) } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - 14 = \frac{u_n}{2} + 7 - 14 = \frac{1}{2}u_n - 7 = \frac{1}{2}(u_n - 14) = \frac{1}{2}v_n.$$

$$v_0 = u_0 - 14 = 10 - 14 = -4$$

Donc la suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = -4$ et de raison $q = \frac{1}{2}$

$$\text{b) } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n \text{ donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 14 = 14 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3)

$$S_n = \sum_{i=0}^n v_i = -4 \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} \text{ donc } \boxed{S_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 8}$$

$$T_n = \sum_{i=0}^n u_i = \sum_{i=0}^n 13 + \sum_{i=0}^n v_i = 14(n+1) + 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 8 \text{ donc } \boxed{T_n = 14n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 6}$$

4)

a) L'algorithme détermine pour quelle valeur de n , on a $|u_n - 14| \leq P$.

b) Soit $P = 1$. L'algorithme renvoie la valeur 2.

	n	u	test $ u - 14 > P$
	0	10	oui
étape 1	1	12	oui
étape 2	2	13	non

Exercice 4

1. a) f est définie, pour tout réel x tel que $2x - 4 \neq 0$ donc son ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

f est dérivable sur D_f comme fonction rationnelle.

$$\text{b) Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f'(x) = \frac{(12x - 14)(2x - 4) - 2(6x^2 - 14x + 5)}{(2x - 4)^2} = 2 \times \frac{6x^2 - 24x + 23}{(2x - 4)^2}$$

Recherche des solutions de $6x^2 - 24x + 23 = 0$ ou recherche des racines de $6x^2 - 24x + 23$

$$\Delta = 24^2 - 4 \times 6 \times 23 = 24$$

$24 > 0$ donc les racines de $6x^2 - 24x + 23$ sont

$$x_1 = \frac{24 + \sqrt{24}}{2 \times 6} = \frac{1}{6}\sqrt{6} + 2 \text{ et } x_2 = \frac{24 - \sqrt{24}}{2 \times 6} = -\frac{1}{6}\sqrt{6} + 2$$

$6x^2 - 24x + 23$ est un trinôme du second degré, son signe est celui de a à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{6}\sqrt{6} + 2$	2	$\frac{1}{6}\sqrt{6} + 2$	$+\infty$		
signe de $6x^2 - 24x + 23$	+	0	-	-	0	+	
signe de $(2x - 4)^2$	+		+	+		+	
signe de $f'(x)$	+	0	-		-	0	+

Donc f est croissante sur les intervalles $]-\infty; -\frac{1}{6}\sqrt{6} + 2]$ et $[\frac{1}{6}\sqrt{6} + 2; +\infty[$ et f est décroissante sur l'intervalle $[-\frac{1}{6}\sqrt{6} + 2; \frac{1}{6}\sqrt{6} + 2]$.

On en déduit le tableau de variation de f

$$f\left(-\frac{1}{6}\sqrt{6} + 2\right) = 5 - \sqrt{6} \text{ et } f\left(\frac{1}{6}\sqrt{6} + 2\right) = \sqrt{6} + 5$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{6}\sqrt{6} + 2$	2	$\frac{1}{6}\sqrt{6} + 2$	∞
variations de f		$5 - \sqrt{6}$	\parallel	$\sqrt{6} + 5$	
	\nearrow		$\searrow \parallel \searrow$		\nearrow

2. a) Pour tout $x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x - 4} = \frac{2ax^2 + (2b - 4a)x + c - 4b}{2(x - 2)}$

or $f(x) = \frac{6x^2 - 14x + 5}{2x - 4}$

Par identification, on obtient $\begin{cases} 2a = 6 \\ 2b - 4a = -14 \\ -4b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

Donc pour tout $x \in D_f$, $f(x) = 3x - 1 + \frac{1}{2x - 4}$.

b) Pour tout $x \in D_f$, $f(x) - (3x - 1) = \frac{1}{2x - 4}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de $2x - 4$	$-$	0	$+$

signe de 2 à droite du zéro

Si $x \leq 2$, $f(x) - (3x - 1) \leq 0$ donc Δ est au-dessus de C ;

Si $x \geq 2$, $f(x) - (3x - 1) \geq 0$ donc Δ est au-dessous de C .

Exercice 5

Soit g la fonction définie sur $[-5; 5]$ par $g(x) = -3x^3 + 7x^2 + 22x - 8$

g est une fonction polynôme donc son ensemble de définition est $D_g = \mathbb{R}$

f est dérivable sur D_g comme fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -9x^2 + 14x + 22$$

Recherche des solutions de $-9x^2 + 14x + 22 = 0$:

$$\Delta = 14^2 - 4 \times 22 \times (-9) = 988$$

$988 > 0$ donc les solutions de $-9x^2 + 14x + 22$ sont

$$x_1 = \frac{-14 + \sqrt{988}}{2 \times (-9)} = \frac{7}{9} - \frac{1}{9}\sqrt{247} \text{ et } x_2 = \frac{-14 - \sqrt{988}}{2 \times (-9)} = \frac{1}{9}\sqrt{247} + \frac{7}{9}$$

$-9x^2 + 14x + 22$ est un trinôme du second degré, son signe est celui de a à l'extérieur des racines.

$$g\left(\frac{7}{9} - \frac{1}{9}\sqrt{247}\right) = \frac{2900}{243} - \frac{494}{243}\sqrt{247} \approx -20,016$$

$$g\left(\frac{7}{9} + \frac{1}{9}\sqrt{247}\right) = \frac{494}{243}\sqrt{247} + \frac{2900}{243} \approx 43,884$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$\frac{7}{9} - \frac{1}{9}\sqrt{247}$	$\frac{1}{9}\sqrt{247} + \frac{7}{9}$	$+\infty$
signe de $6x^2 - 24x + 23$	$-$	0	0	$-$
variations de g		\searrow	\nearrow	\searrow
		$\frac{2900}{243} - \frac{494}{243}\sqrt{247}$	$\frac{494}{243}\sqrt{247} + \frac{2900}{243}$	

Exercice 6

1) On répète $n = 2000$ fois la même épreuve : "choisir un cône".

Cette épreuve a deux issues :

- le succès : "le cône présente un défaut" de probabilité $p = 0,003$.
 - l'échec : "le cône ne présente pas de défaut" de probabilité $1 - p = 0,997$
- Les épreuves sont identiques et indépendantes.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathbf{B}(2000 ; 0,003)$.

Autrement dit, $\forall k \in \{0, 1, \dots, 2000\}$, $P(X = k) = \binom{2000}{k} 0,003^k 0,997^{2000-k}$

2) Avec la calculatrice, $P(X \leq 11) \approx 0,980$

La probabilité qu'un lot ne soit pas échangé est d'environ 0,980

Exercice 7

Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $] -\pi; \pi]$ les équations suivantes :

a) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

dans \mathbb{R} $S = \left\{ \frac{-\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

dans $] -\pi; \pi]$ $S = \left\{ \frac{-\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right\}$

b) $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{2\pi}{5}) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{5} + 2k\pi$ ou $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{2\pi}{5} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{5} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{20} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{20} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

dans \mathbb{R} $S = \left\{ \frac{3\pi}{20} + 2k\pi; \frac{7\pi}{20} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

dans $] -\pi; \pi]$ $S = \left\{ \frac{3\pi}{20}; \frac{7\pi}{20} \right\}$

c) $2\sin(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(\frac{-\pi}{6}) \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$ ou

$x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

dans $] -\pi; \pi]$ $S = \left\{ \frac{-\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

Exercice 8

1. On considère, sur un cercle trigonométrique le point M image du nombre réel x tel que :

$-\pi < x \leq -\frac{\pi}{2}$ et $\cos(x) = \frac{-3}{7}$

Pour tout réel x on a $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ donc $|\sin(x)| = \sqrt{1 - \left(\frac{-3}{7}\right)^2} = \frac{2}{7}\sqrt{10}$ or $-\pi < x \leq -\frac{\pi}{2}$ donc

son sinus est négatif et on a $\sin(x) = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$

2. Donner la valeur exacte de :

a) $\sin(\pi - x) = \sin(x) = -\frac{2}{7}\sqrt{10}$

b) $\sin(-x) = -\sin(x) = \frac{2}{7}\sqrt{10}$

c) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x) = -\frac{2}{7}\sqrt{10}$

d) $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x) = \frac{-3}{7}$

e) $\cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos(x) = \frac{-3}{7}$