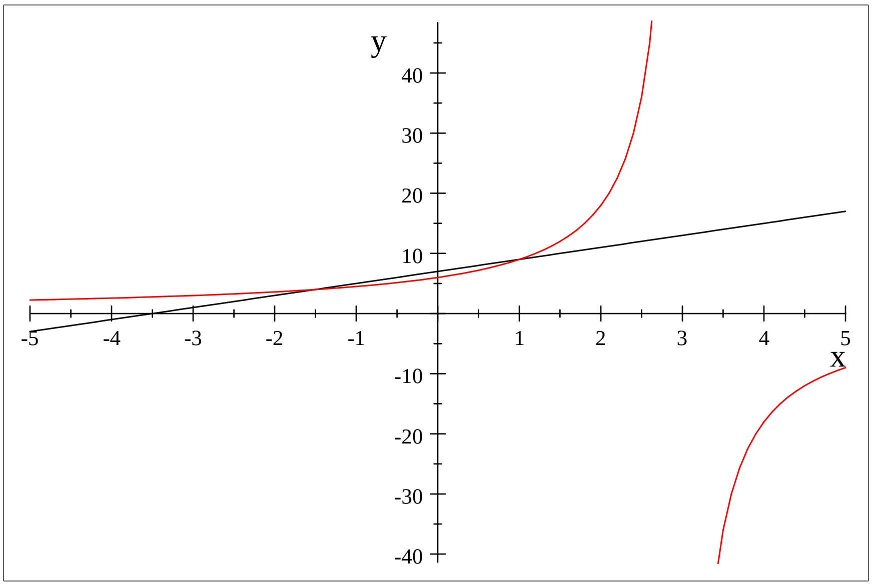
Mathématiques De la seconde à la $1^{\text{ère}}$ Corrigés

Exercice 1

f et g sont deux fonctions définies par $f(x) = 2x + 7$ et $g(x) = -\dfrac{18}{x-3}$

On a tracé ci-dessous la représentation graphique des fonctions f et g.

(f étant une fonction affine, sa représentation graphique est une droite)



1) Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$

Faux : la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ mais la fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$

2) La courbe représentant f coupe la courbe représentant g en au moins deux points

Vrai : d'après la représentation graphique ci-dessus. On peut même préciser qu'il n'y a que deux points d'intersection puisque $f(x) < 0 < g(x)$ sur $\left]-\infty\,;\,-5\right[$ et $g(x) < 0 < f(x)$ sur $]3;+\infty[$.

3) $f(-1) = 5$

Vrai : $f(-1) = 2 \times (-1) + 7 = 5$

4) Pour tout réel x $\quad f(x) = \dfrac{(2x+7)(x-1)}{x-1}$

Faux : $f(1) = 11$ mais il est impossible de remplacer x par 1 dans l'expression $\dfrac{(x+3)(x-1)}{x-1}$ car dans ce cas, le dénominateur vaut 0.

Remarque : Par contre, l'affirmation, "Pour tout réel $\boxed{x \neq 1}$, $f(x) = \dfrac{(2x+7)(x-1)}{x-1}$" est vraie.

5) Pour tout réel $x \neq 3$ $\quad f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+3)(x-1)}{x-3}$

Vrai :

D'une part, pour tout réel $x \neq 3$, $\quad f(x) - g(x) = 2x + 7 + \dfrac{18}{x-3} = \dfrac{(2x+7)(x-3)+18}{x-3} = \dfrac{2x^2+x-3}{x-3}$

D'autre part, pour tout réel $x \neq 3$, $\quad \dfrac{(2x+3)(x-1)}{x-3} = \dfrac{2x^2+x-3}{x-3}$

Donc, pour tout réel $x \neq 3$, $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+3)(x-1)}{x-3}$

6) Pour tout réel $x \neq 3$ $\quad f(x) - g(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{x-3}$

Faux :

D'une part, $f(2) - g(2) = 2 \times 2 + 7 - \left(-\dfrac{18}{2-3}\right) = -7$

D'autre part, $\dfrac{(2+3)(2-1)}{2-3} = -5$

Donc $f(2) - g(2) \neq \dfrac{(2+3)(2-1)}{2-3}$ donc l'égalité $f(x) - g(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{x-3}$ est fausse pour $x = 2$.

7) Il existe un réel x, tel que $f(x) - g(x) = 0$

Vrai : $f(1) - g(1) = 2 \times 1 + 7 - \left(-\frac{18}{1-3}\right) = 0$ donc l'égalité $f(x) - g(x) = 0$ est vraie pour $x = 1$.

8) Il existe un réel $x \neq 3$ tel que $f(x) - g(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{x-3}$

D'une part, $f(1) - g(1) = 0$

D'autre part, $\frac{(1+3)(1-1)}{1-3} = 0$

Donc $f(1) - g(1) = \frac{(1+3)(1-1)}{1-3}$ donc l'égalité $f(x) - g(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{x-3}$ est vraie pour $x = 1$.

9) La courbe représentant *f* est au dessus de la courbe représentant g sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{2}, 1\right[$.

Vrai : d'après la représentation graphique.

10) La courbe représentant *f* est au dessous de la courbe représentant g sur $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup]1; +\infty[$

Faux : sur $]3; +\infty[$ la courbe représentant *f* est au dessus de la courbe représentant g

Exercice 2

1) $f(-3) = (-3+3)(-3+4) = 0$

$f(0) = 0^2 + 7 \times 0 + 12 = 12$

$f\left(-\frac{7}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2} + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

2) $f\left(\sqrt{7}\right) = \left(\sqrt{7}\right)^2 + 7\sqrt{7} + 12 = 7\sqrt{7} + 19$

3)

a) Sur $\mathbb{R}$: $f(x) = 0 \ (*)$

$(*) \Leftrightarrow (x+3)(x+4) = 0$ Or $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$

$(*) \Leftrightarrow x + 3 = 0$ ou $x + 4 = 0$

$(*) \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = -4$

$S = \{-4 ; -3\}$

b) Sur $\mathbb{R}$: $f(x) = 12$

$(*) \Leftrightarrow x^2 + 7x + 12 = 12$

$(*) \Leftrightarrow x^2 + 7x = 0$

$(*) \Leftrightarrow x(x+7) = 0$

$(*) \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -7$

$S = \{-7 ; 0\}$

c) Sur $\mathbb{R}$: $f(x) = -\frac{1}{4}$

$(*) \Leftrightarrow \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

$(*) \Leftrightarrow \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = 0$

$(*) \Leftrightarrow x + \frac{7}{2} = 0$

$(*) \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$

$S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$

4) On utilise la forme canonique de *f* (Le coefficient devant x^2 est strictement positif)

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	$+\infty$
variations de *f*	↘	$-\frac{1}{4}$	↗

5) Sur $\mathbb{R}$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = -4$

Donc les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $(-4 ; 0)$ et $(-3 ; 0)$

6) $f(0) = 12$

Donc le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0 ; 12)$

7) Sur $\mathbb{R}$: $f(x) = 12 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -7$
Donc les points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y = 12$ ont pour coordonnées $\left(0\ ;\ 12\right)$ et $\left(-7\ ;\ 12\right)$
8) $f\left(\sqrt{7}\right) = 7\sqrt{7} + 19$
Donc le point d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $x = \sqrt{7}$ a pour coordonnées $\left(\sqrt{7}\ ;\ 7\sqrt{7} + 19\right)$
9) Les séparateurs sont -4 et -3

x	$-\infty$ $\qquad$ -4 $\qquad$ -3 $\qquad$ $+\infty$	
signe de $x+3$	$-$ $\qquad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$	signe de 1 à droite du zéro
signe de $x+4$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\qquad$ $+$	signe de 1 à droite du zéro
signe de $f(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$	

$S = \left]-4\ ;\ -3\right[$

Exercice 3

On s'intéresse à la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{3x-7}{-x+2}$
1)
a) On étudie le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
La valeur interdite est 2 et le séparateur est $\dfrac{7}{3}$

x	$-\infty$ $\qquad$ 2 $\qquad$ $\frac{7}{3}$ $\qquad$ $+\infty$	
signe de $3x-7$	$-$ $\qquad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$	signe de 3 à droite du zéro
signe de $-x+2$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\qquad$ $-$	signe de -1 à droite du zéro
signe de $f(x)$	$-$ $\quad$ $\Vert$ $\quad$ $+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$	

b) $S = \left]-\infty\ ;\ 2\right[\cup \left[\dfrac{7}{3}\ ;\ +\infty\right[$
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$:
$-3 + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{-3(x-2)+1}{x-2} = \dfrac{-3x+7}{x-2} = \dfrac{3x-7}{-x+2} = f(x)$
3) $f\left(\sqrt{7}\right) = \dfrac{3\sqrt{7}-7}{-\sqrt{7}+2} = \dfrac{\left(3\sqrt{7}-7\right)\left(2+\sqrt{7}\right)}{\left(2-\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{7}\right)} = \dfrac{6\sqrt{7}+21-14-7\sqrt{7}}{4-7} = \dfrac{7-\sqrt{7}}{-3} = \dfrac{\sqrt{7}-7}{3}$
4) Sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-7}{-x+2} = 0 \Leftrightarrow 3x-7 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{3}$
Or $\dfrac{7}{3}$ n'est pas valeur interdite donc $S = \left\{\dfrac{7}{3}\right\}$
5)
a) Sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$:
$f(x) = -3 \Leftrightarrow -3 + \dfrac{1}{x-2} = -3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ impossible
Donc $S = \varnothing$
b) Sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$:
$f(x) = 5 \Leftrightarrow -3 + \dfrac{1}{x-2} = 5 \Leftrightarrow -8 + \dfrac{1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-8(x-2)+1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-8x+17}{x-2} = 0 \Leftrightarrow -8x+17 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{17}{8}$
Or $\dfrac{17}{8}$ n'est pas valeur interdite donc $S = \left\{\dfrac{17}{8}\right\}$
c) Sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{3}$
Donc le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{3}\ ;\ 0\right)$
6) $f(0) = -\dfrac{7}{2}$
Donc le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $\left(0\ ;-\dfrac{7}{2}\right)$
7) Sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$: $f(x) = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{17}{8}$
Donc le point d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y = 5$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{17}{8}\ ;\ 5\right)$

8) $f\left(\sqrt{7}\right) = \dfrac{\sqrt{7}-7}{3}$

Donc le point d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $x = \sqrt{7}$ a pour coordonnées $\left(\sqrt{7}\ ;\ \dfrac{\sqrt{7}-7}{3}\right)$

Exercice 4

1) Cet algorithme simule le lancer de deux dés cubiques équilibrés et affiche la différence entre le plus grand et le plus petit numéro obtenus.

2) $\Omega = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\}$

3)

1^{er} dé $\downarrow$; $2^{ème}$ dé $\rightarrow$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Loi de probabilité sur Ω :

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$	$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

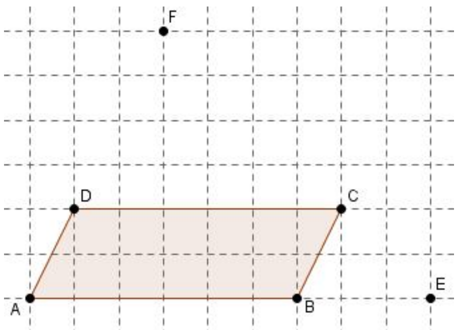
Exercice 5

1)

Etape	x	Test $x < 20$ (oui/non)
Initialisation	3	oui
Etape 1	6	oui
Etape 2	12	oui
Etape 3	24	non

2) La valeur affichée est 24.

Exercice 6

1) 

2)D'après la relation de Chasles pour les vecteurs :

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}$

Or $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ donc :

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

D'après la relation de Chasles pour les vecteurs :

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$

3) On a $-3\overrightarrow{CE} = -3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires donc les points C, E et F sont alignés

Exercice 7

$A(1;4)$, $B(-1;-1)$ et $C(5;2)$

1) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ $\quad AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$ $\quad BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

$\Leftrightarrow AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-4)^2}$ $\quad \Leftrightarrow AC = \sqrt{(5-1)^2 + (2-4)^2}$ $\quad \Leftrightarrow BC = \sqrt{(5+1)^2 + (2+1)^2}$

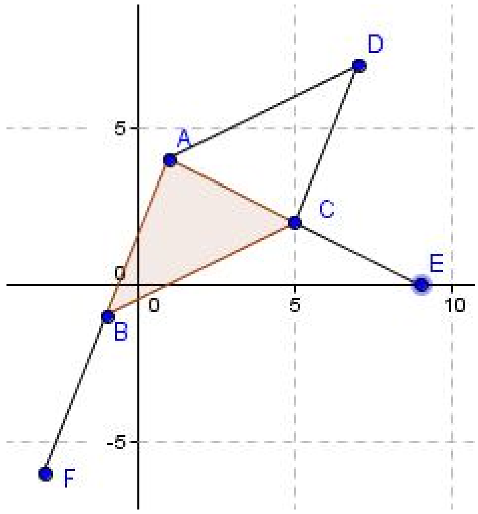
$\Leftrightarrow AB = \sqrt{4+25}$ $\quad \Leftrightarrow AC = \sqrt{16+4}$ $\quad \Leftrightarrow BC = \sqrt{36+9}$

$\Leftrightarrow AB = \sqrt{29}$ $\quad \Leftrightarrow AC = \sqrt{20}$ $\quad \Leftrightarrow BC = \sqrt{45}$

BC est le côté qui a la plus grande longueur donc si le triangle ABC est rectangle, il sera rectangle en A.

Or $BC^2 = 45$ et $AB^2 + AC^2 = 29 + 20 = 49$

Comme $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors ABC n'est pas un triangle rectangle en A d'après la contraposée du théorème de Pythagore donc le triangle ABC n'est pas rectangle.



2) $ABCD$ est un paralélogramme $(*)$

$(*) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - x_A = x_C - x_B \\ y_D - y_A = y_C - y_B \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5+1+1 \\ y_D = 2+1+4 \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 7 \\ y_D = 7 \end{cases}$

Donc $D\left(7\ ;\ 7\right)$

3) E est symétrique du point A par rapport à C. $(*)$

$(*) \Leftrightarrow \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC}$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - x_C = x_C - x_A \\ y_E - y_C = y_C - y_A \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 2\times 5 - 1 \\ y_E = 2\times 2 - 4 \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 9 \\ y_E = 0 \end{cases}$

Donc $E\left(9\ ;\ 0\right)$

4) Les segments $[FD]$ et $[BC]$ ont même milieu $(*)$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_F + x_D}{2} = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ \dfrac{y_F + y_D}{2} = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 5 - 1 - 7 \\ y_F = -1 + 2 - 7 \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = -3 \\ y_F = -6 \end{cases}$

Donc $F\left(-3\ ;\ -6\right)$

5) J est le milieu de $[FE]$ donc $x_J = \dfrac{x_F + x_E}{2} = \dfrac{-3+9}{2} = 3$ et $y_J = \dfrac{y_F + y_E}{2} = \dfrac{-6+0}{2} = -3$

Donc $J\left(3\ ;\ -3\right)$

6) $\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A\right)$ donc $\overrightarrow{AB}\left(-1-1\ ;\ -1-4\right)$ donc $\overrightarrow{AB}\left(-2\ ;\ -5\right)$

Et $\overrightarrow{BF}\left(-3+1\ ;\ -6+1\right)$ donc $\overrightarrow{BF}\left(-2\ ;\ -5\right)$

On a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BF}$ donc F est le symétrique de A par rapport à B.